Lite talteori

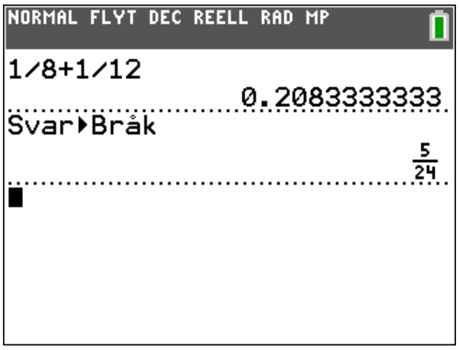
För att beräkna den *minsta gemensamma multipeln (mgm)* eller *största gemensamma delaren* (sgd) till två tal så använder man sig av faktorisering av de två talen. Faktorisering tog vi upp i en aktivitet i *Koda med TI, kapitel 3, Tillämpning*.

Definition: *Den största gemensamma delaren* (förkortat **sgd**) av två eller flera *heltal* vilka alla inte är noll det största heltal som *delar* alla talen. sgd av heltalen a och b skrivs sgd(a,b). Om vi tar talen 8 och 12 till exempel så är 4 det största heltal som vi kan dividera talen med. 8/4=2 och 12/4= 3.

Minsta gemensamma delaren (**mgm**) av två heltal a och b är det minsta positiva heltalet som kan delas av både a och b. Om vi tar samma tal som förut, 8 och 12 så är 24 det minsta heltal som kan delas av 8 och 12.

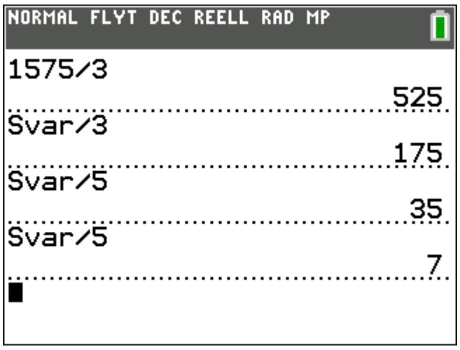
Tänk dig att du ska addera 1/8 och 1/12:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 8}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 12}=\frac{3}{24}+\frac{2}{24}=\frac{5}{24}$$



Det här ingenting nytt och du har i dina tidigare studier gjort sådana här beräkningar många gånger. Beräkningen ovan gör du numera kanske med din grafräknare. Där finns ett verktyg som omvandlar decimaltal till tal i bråkform.
Nu ska vi ta upp **mgm** och **sgd** mer generellt. I nuvarande ämnesplaner tar man egentligen upp detta först i kurs 5 men ingenting hindrar att man tar upp det tidigare, eftersom redan tidigt i studierna blir man bekant med begreppen faktorisering och primtal.

Vad är nu sgd och mgm till talen 1470 och 1575?
Vi börjar med att dividera 1470 med det minsta primtalet, dvs 2. Då har vi 735 kvar. Det är delbart med både 3 och 5 så vi tar det minsta talet, dvs 3. Då får vi 245. Det är inte delbart med 3 men med 5. Vi får då 245/5=49. 49 är vi ju bekanta med och det är delbart med 7 och vi har då 7 kvar.

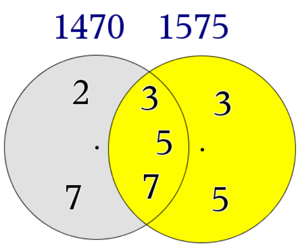


Vi gör nu samma sak med det andra talet. Som vi här visar i bilden till höger.

Primtalsfaktoriseringen för de två talen blir då:

$$1470=2\times 3\times 5\times 7\times 7$$

$$1575=3\times 3\times 5\times 5\times 7$$

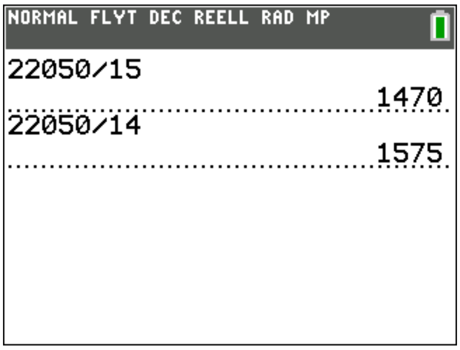


Vilka *gemensamma* faktorer har nu dessa två tal? I figuren till höger ser vi att 3, 5 och 7 är gemensamma faktorer. *sgd* är då $3\cdot 5\cdot 7=105.$ Pröva att dividera de två talen med 105 på din grafräknare. Det måste ju bli $2\cdot 7=14$ resp. $3\cdot 5=15.$ Se figuren.

Nu över till mgm. Vi ska hitta det minsta tal som innehåller både 1470 och 1575 som faktorer. Här får vi det genom att multiplicera ihop alla faktorer i figuren på förra sidan:

$2\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3\cdot 5=22\,050$

Vi dividerar 22 050 med de två talen du beräknade på förra sidan. Se fönstret till höger! Det går jämnt upp!

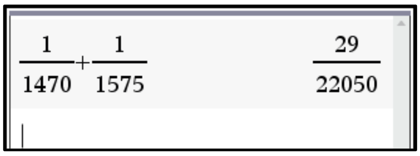


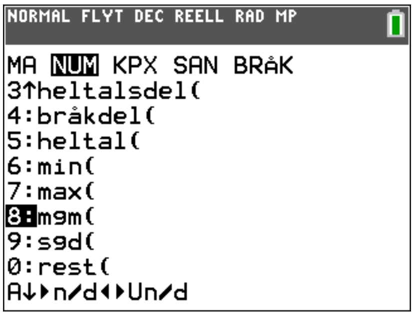
Det här betyder att du nu ska kunna exakt beräkna resultatet för additionen

$\frac{1}{1470}+\frac{1}{1575}$ Du kan skriva om bråken så här:

$$\frac{1\cdot 15}{1470\cdot 15}+\frac{1\cdot 14}{1575\cdot 14}=\frac{29}{22\,050}$$

Fördjupning: TI-84 Plus CE-T Python Edition kan beräkna exakta resultat om talen inte är alltför stora. Låt eleverna pröva olika additioner av bråk. Man Använder då funktionen *Bråk* som finns under tangenten math. (Här har vi däremot gjort additionen med TI-Nspire. Vi får då ett *exakt* resultat).



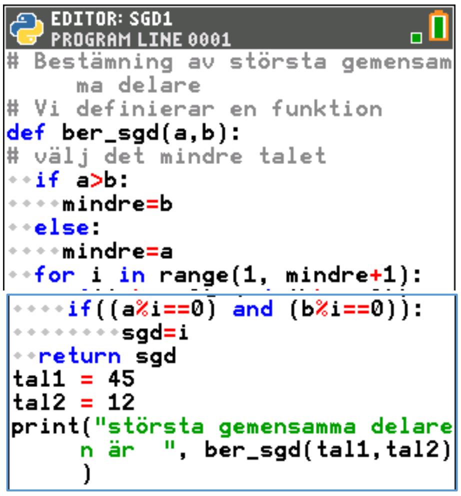


Gå också igenom funktionerna mgm och sgd som finns på räknaren. Tryck på math, välj NUM i menyn och välj sedan alternativ 8 och 9. Man skriver sgd(a,b) respektive mgm(a,b) där a och b är de tal man vill göra beräkningar på.
Växla gärna till engelsk språkinställning på grafräknaren då ser man vad förkortningarna blir på engelska.

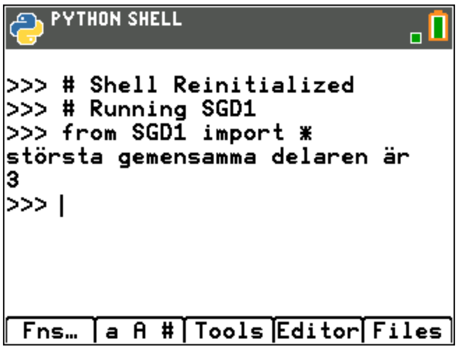
Över till Python

Nu över till programmeringen. Vi börjar då med ett program som bestämmer den största gemensamma delaren, sgd. Här bör du vara bekant med programmeringsbegreppen funktion, funktionsargument och rekursion.

Här skickas två heltal som lagras i variablerna tal1 och tal2 till funktionen. Funktionen beräknar *sgd* för talen och returnerar den. I funktionen bestämmer vi först det mindre av de två talen, eftersom *sgd* bara kan vara mindre än eller lika med det minsta talet. Vi använder sedan for-loop från 1 till det talet.



I varje iteration kontrollerar vi om vårt beräknade tal delar talen tal1 och tal 2. Om så är fallet, lagrar vi talet som sgd. Efter avlutandet av loopen kommer vi fram till det största talet som delar tal1 och tal2.
Några detaljer: a%i resp b%i betyder att vi beräknar heltalsresten vid division av a resp b med i. Att resultatet blir noll betyder att divisionen går jämnt ut.



Ändra nu programmet så att det vid körning efterfrågar de två tal som man ska hitta den största gemensamma delaren till. Nu är de två talen med i programkoden.

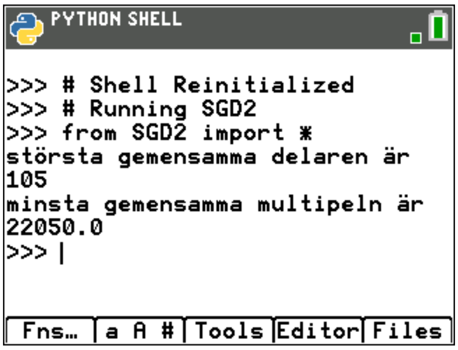
Vid körning av programmet får vi resultatet 3, vilket vi enkelt kan räkna ut utan hjälpmedel. Pröva nu med talen 1470 och 1575 som vi hade som exempel tidigare. Du får resultatet 105.

För att beräkna minsta gemensamma multipeln, mgm, ska vi nu använda oss av ett samband:

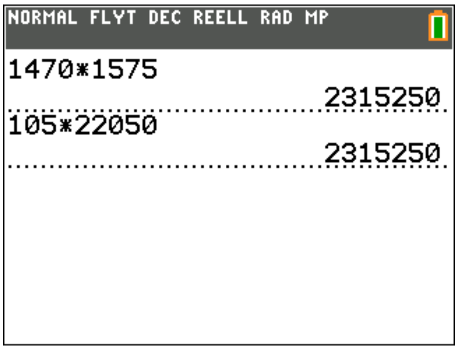
$tal1 \cdot tal2 = mgm \cdot sgd$. Vi löser ut mgm:

$$mgm = \frac{tal1 \cdot tal2}{sgd}$$

Komplettera nu programmet så att *både* sgd och mgm beräknas. Det kan se ut så här vid körning.



Vi testar att sambandet stämmer för talen 1470 och 1575:



Titta igenom de olika funktionerna hos grafräknaren som man når genom att trycka på tangenten math och sedan väljer **NUM** i menyn. Här finns ju sgd och mgm men även en hel del andra.