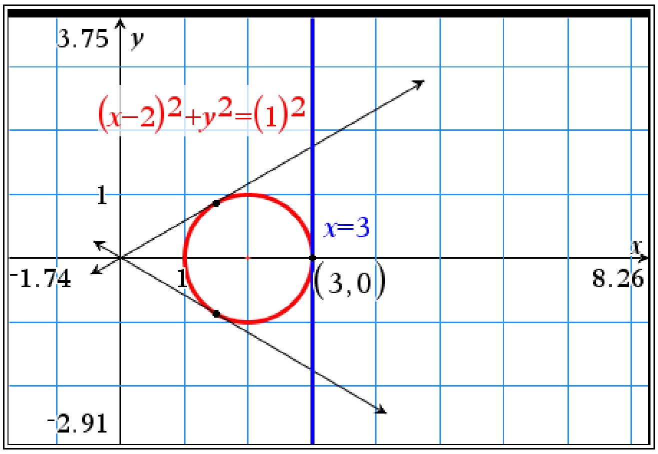
Ringa in en cirkel

Tre linjer är tangenter till en cirkel med ekvationen

$(x-2)^2+y^2=1$

Två av dessa tangenter går igenom origo och den tredje tangenten är parallell med y-axeln. Beräkna *exakt* arean av den största triangel som bildas av dessa tre tangenter.

I figuren nedan har vi plottat cirkeln. En cirkels ekvation är ju ingen funktion men med TI-Nspire kan man plotta andra relationer än funktioner. I detta fall ett kägelsnitt.



Med geometriverktyget har vi sedan ”för hand” dragit tangenter så att de verkar gå igenom origo. Man får då tangenternas ekvationer utskrivna men vi har valt att dölja dessa. Vi ska ju göra *exakta* beräkningar.

Du kan följa resonemangen på de följande skärmsidorna. Vi har alltså skrivit om cirkelns ekvation så att vi får två delar som är funktioner.

Vi skriver om ekvationen för cirkeln så att vi får två delar:

$y=\pm\sqrt{-x^2+4x-3}$

De två tangenterna har ekvationen y=kx resp. y=−kx eftersom de passar genom origo. Vi tittar nu på den övre tangenten. Detta ger ekvationen

$\text{solve}\left(k\cdot x=\sqrt{-x^2+4\cdot x-3},x\right)$

$\blacktriangleright\ x=\dfrac{\sqrt{1-3\cdot k^2}+2}{k^2+1}$ or $x=\dfrac{-\left(\sqrt{1-3\cdot k^2}-2\right)}{k^2+1}$ ⚠

Eftersom vi har tangeringspunkter gäller att diskriminanten (uttrycket under rottecknet) är noll. Vi får då:

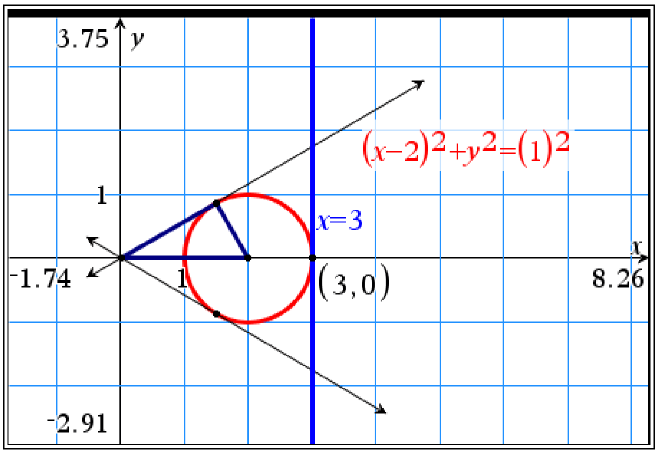
$1-3k^2=0$ som har lösningen $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Den övre tangenten har ekvationen $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ och den undre tangenten har ekvationen $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$. Den tredje tangenten har ekvationen $x=3$ och vi får då direkt skärningspunkterna med de två andra tangenterna: $\left(3,\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)$ resp. $\left(3,-\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)$. Detta ger att triangelns bas är $2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ Arean blir då $\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2}=3\sqrt{3}$

Den knixiga delen här är att lösa ekvationen

$k\cdot x=\sqrt{-x^2+4x-3}$

och där har vi använt den inbyggda *symbolhanteraren*.

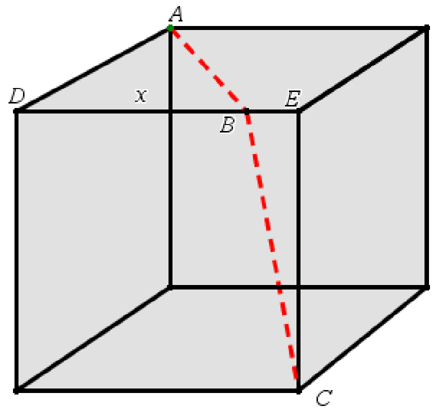
Det finns en annan lösning där man utnyttjar att medelpunkt finns i (2, 0) och radien är 1. Se bild.



Den markerade blå rätvinkliga triangeln har basen 1 och hypotenusan 2. Vinkeln mellan tangenten och *x*-axeln är då 30 grader och detta ger i sin tur att den eftersökta triangeln är liksidig. Halva basen i triangeln är då $\sqrt{3}$ och man kommer sedan fram till värdet på arean eftersom vi känner höjden.

Problem av det här slaget som verkar knepiga har ofta enklare geometriska lösningar. Detta är en klassiker:

En fluga ska promenera den kortaste vägen från ett hörn i en kub med sidan 1 dm till ett annat hörn. Se figuren nedan. Vad är den kortaste vägen för flugan?



Hm, det här verkar som ett max/minproblem. Vi inför beteckningar och kallar avståndet *DB* för *x* och avståndet *BE* blir då 1-*x*.

Pythagoras sats ger då att sträckan *ABC* blir

$$\sqrt{1^2+x^2}+\sqrt{1^2+(1-x)^2}$$

Vi har här definierat uttrycket för sträckan som en funktion.

En direkt exakt beräkning av derivatans nollställe ger följande resultat:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1^2+x^2}+\sqrt{1^2+(1-x)^2}\right)=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \blacktriangleright \sqrt{5}$$

t:

Ett sådant här uttryck är för det första ganska svårt att derivera och att lösa ekvationen med derivatauttrycket lika med noll är ganska komplicerat. Se skärmbild.

$$\text{Define } f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2-2\cdot x+x^2} \blacktriangleright \textit{Klar}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{comDenom}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\blacktriangleright \frac{x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+2}+x\cdot\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)\cdot(x^2-2\cdot x+2)}}$$

Här kan man gå vidare och först försöka förenkla täljaruttrycket ovan.

Det finns dock ett betydligt enklare sätt att lösa detta problem. Här behövs ingen *calculus*. Vi viker ut de två sidor där flugan promenerar och drar en rät linje mellan A och C.

Pythagoras sats ger direkt att sträckan är $\sqrt{5}$ dm.