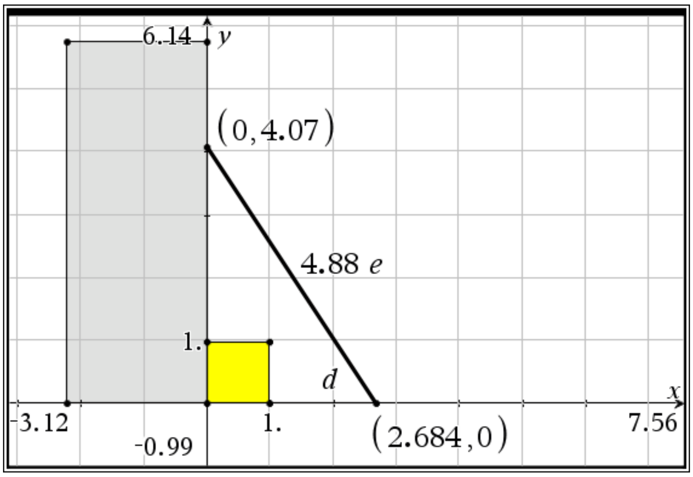
Stegen och lådan

En stege står lutad mot en vägg på ett sådant sätt att den precis nuddar den låda som står mot väggen. Lådan är en kub med sidan 1 meter. Stegens längd är 5 m. Hur högt upp på väggen når stegen?

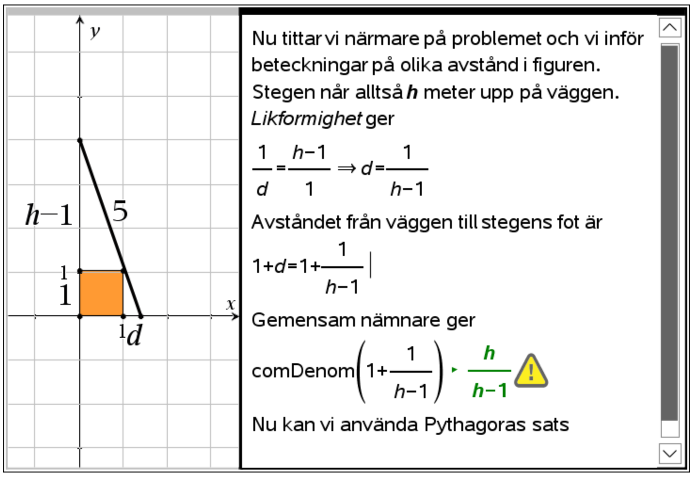
Det första man gör när man har ett sådant lite klurigare problem är att skaffa sig en första känsla för problemet. Vi har då gjort en enkel dynamisk konstruktion i appen Grafer.

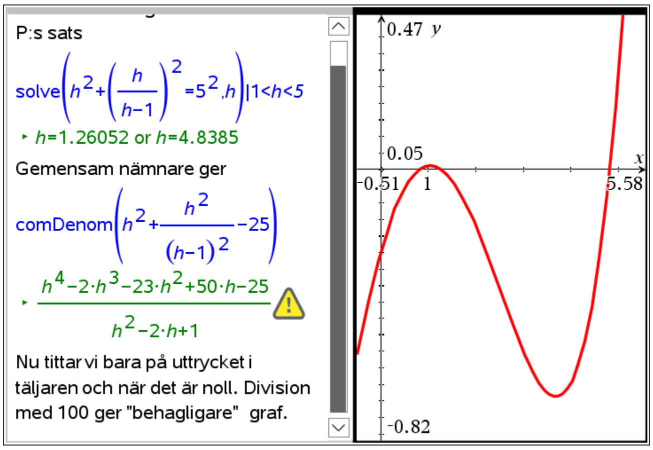


Man kan flytta stegen så att fot och topp hela tiden rör sig längs markplanet och väggen. Stegens längd ändras då. Försök att få ställa in så att längden kommer så nära 5 m som möjligt.

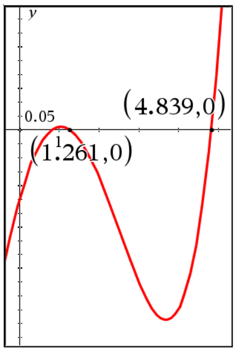
Vi ser hela tiden koordinaterna för stegens fot och topp och stegens längd. Tänk på att stegen precis ska nudda kanten på lådan.

Hör börjar nu beräkningen enligt en metod. Beteckningarna har vi i figuren. Likformighet och Pythagoras sats gör att man kommer fram en ekvation som man löser numeriskt. Man kan naturligtvis hitta lösningar genom att rita en graf. Det visar vi också





När vi plottar har vi bara plottat uttrycket i täljaren eftersom vi vill veta när hela uttrycket är noll. Dessutom har vi dividerat med 100 för att få en ”behagligare” graf att beräkna nollställen på.

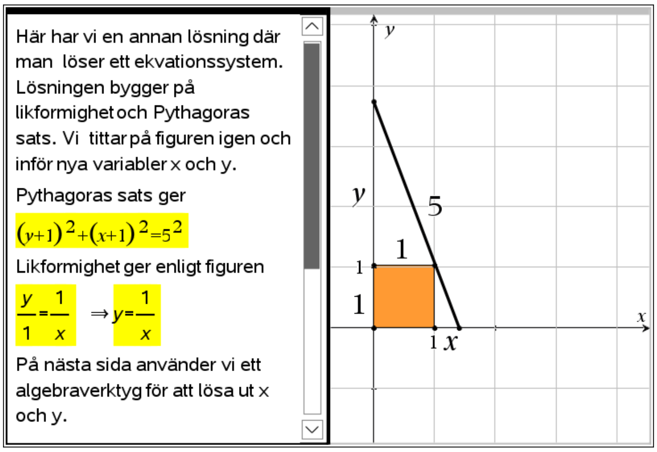


I grafen på ovan sida ser vi tre nollställen. Det första nollstället ungefär vid x = 0,8 kan förkastas här eftersom *x* måste vara större än 1.

I svaret får vi två värden, 1.26 och 4,84, på höjden. Gå tillbaka till konstruktionen på sid 2 och fundera varför det är så.

Problem 2

Här löser vi problemet med en annan metod. Fortfarande är det Pythagoras sats och likformighet som gäller.



Här har vi nu ställt upp ekvationssystemet och löst det för x och y. Tänk på att trycka på Ctrl och enter samtidigt för att få en approximativ lösning. Om du inte trycker på Ctrl får du den exakta lösningen som är ett förfärligt uttryck.

Efter parenteserna har vi lagt in" |x>0 and y>0 " för att bara få lösningar för positiva x och y.

$$\text{solve}\left(\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=25\\ y=\dfrac{1}{x}\end{cases},\{x,y\}\right)\Big|x>0 \text{ and } y>0$$

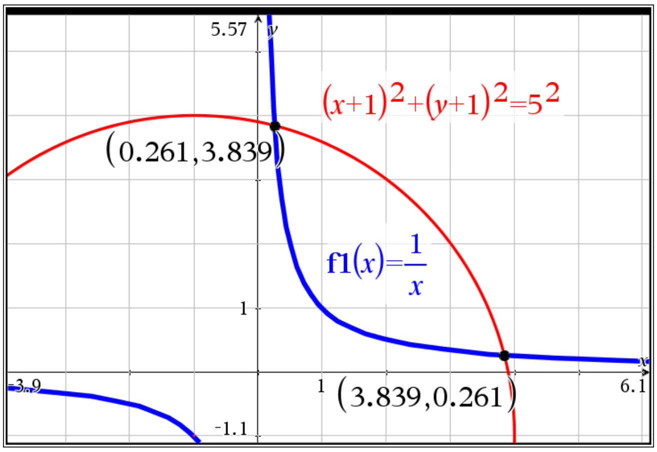
▸ $x=0.260518$ and $y=3.8385$ or $x=3.8385$ and $y=0.260518$

Vi ser att vi får två lösningar. Det har med symmetri att göra. Låt husväggen och marken byta plats i figuren så ser man det .

Man kan också plotta båda ekvationerna i ekvationssystemet och titta på skärningarna. Se nästa sida.

I svaret får vi naturligtvis lägga till 1 meter. Du ser också att man får två lösningar. x och y byter plats helt enkelt.

Man kan också plotta två grafer. Observera att man numera i TI-Nspire kan plotta alla möjliga kurvor om man skriver in uttrycket som en *relation*. Andragradskurvan $(x+1)^2+(y+1)^2=5^2$ är en sådan relation.

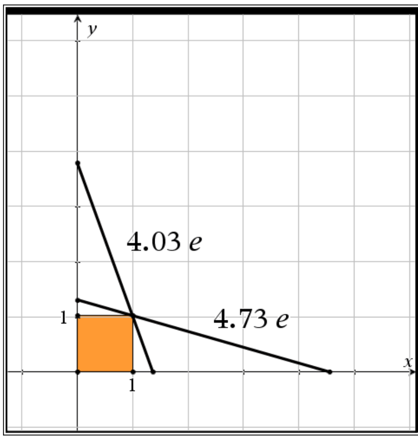


Problem 3

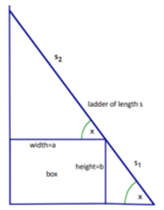
Här använder vi nu trigonometri istället och vi tänker oss en låda med kanterna *a* och *b* och att stegen lutar *v* grader mot väggen. Tänk på att ställa in på grader under Inställningar.

Vi generaliserar problemet alltså. Stegen är fortfarande 5 m lång. På nästa sida har vi först en figur där vi kan titta på vinkeln *v*. Vi har två nu stegar som båda går igenom lådans kant och är nästan 5 m långa båda två. Vi får en av vinklarna till 14,6 grader.

Vad kan du säga om figuren? Vi har ju två möjliga fall. Den "naturliga lösningen" är ju när stegen når som högst men den andra kan vara en möjlig lösning också. Det beror på hur frågan ställdes.



Försök att ställa in längden på stegarna till 5 cm när de snuddar lådans kant. Mät sedan vinklarna mellan mark och stege.



Titta på figuren till höger. Vi får då ekvationen nedan. Vi använder här beteckningen v för vinkerln.

$$5=\frac{b}{\sin(v)}+\frac{a}{\cos(v)}$$

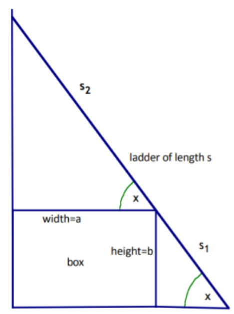
som vi löser för v:

$$\text{solve}\left(5=\frac{b}{\sin(v)}+\frac{a}{\cos(v)},v\right)\Big|0<v<90 \text{ and } a=1 \text{ and } b=1$$

Beräkning av höjden mot väggen:

$\sin(14.602)\cdot 5$ ▸ 1.26052

$\sin(90-14.602)\cdot 5$ ▸ 4.8385



När vi löste ekvationen på förra sidan fick vi bara en lösning. Den andra lösningen räknar vi ut enkelt.

Man kan nu också lösa problemet för andra värden än 1 meter på lådans djup och höjd. Sätt in värden för a och b i ekvationen och lös!

$$\text{solve}\left(5=\frac{b}{\sin(v)}+\frac{a}{\cos(v)},v\right)\Big|0<v<90 \text{ and } a=2 \text{ and } b=1$$

▸ $v=20.4222$ ⚠

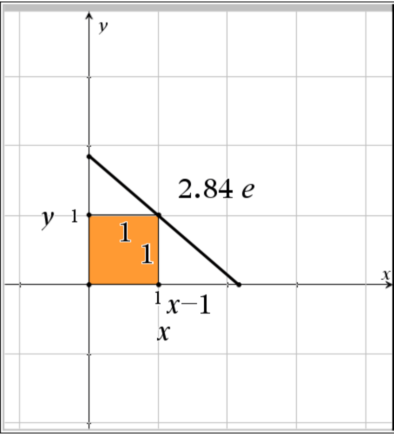
$$\text{solve}\left(5=\frac{b}{\sin(v)}+\frac{a}{\cos(v)},v\right)\Big|0<v<90 \text{ and } a=1 \text{ and } b=2$$

▸ $v=31.5061$ ⚠

Vi har nu visat på tre olika metoder. Det finns säkert andra sätt att lösa problemet.

Problem 4

Det sista problemet handlar om att bestämma den *kortaste* stege som snuddar vid kanten på lådan.



Likformighet ger $\frac{y}{x}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow y=\frac{x}{x-1}$

Pythagoras sats ger hela längden på stegen =

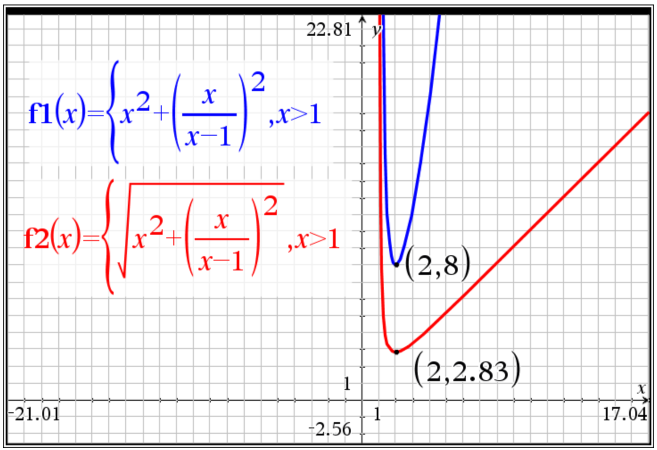
$$\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}$$

Vi söker nu minimum för detta uttryck.

Vi börjar med en graf. Det är ofta en bra idé.

Man bekantar sig först med problemet genom att vinkla stegen och på ett sånt sätt att den snuddar vid kanten på lådan.

Vi fick ju ett uttryck för stegens längd. Vi skriver in det som en funktion och beräknar grafiskt/numeriskt minimipunkten. Vi gör likadant med en funktion som är kvadraten på den förra. De har ju förstås samma minimipunkt och ibland kan man analysera det enklare uttrycket när man vill göra exakta beräkningar.



Vi deriverar och söker derivatans nollställe:

Vi deriverar nu först det jobbiga uttrycket och kommer fram till en

lösning: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\right)|x>1 \blacktriangleright \frac{x}{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}-\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}{(x-1)^2}$

Gemensam nämnare:

$$\text{comDenom}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}-\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}{(x-1)^2}\right)$$

$$\blacktriangleright \frac{x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-2}{x^2\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+2}-2\cdot x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+2}+\sqrt{x^2-2\cdot x+2}}$$

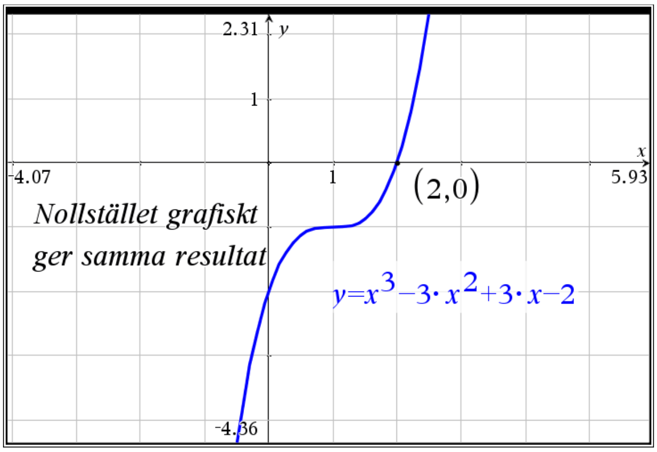
$\text{solve}(x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-2=0,x) \blacktriangleright x=2$

$\text{factor}(x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-2) \blacktriangleright (x-2)\cdot(x^2-x+1)$

Vi får nu direkt stegens längd genom att beräkna värdet på uttrycket $\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}$ när x=2.

Vi får $\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{2-1}\right)^2}=\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}$

Plottning och beräkning av minimipunkt



Observera att vi alltså bara intresserat oss för uttrycket i täljaren. När täljaren är noll är hela uttrycket noll, såvida inte nämnaren är noll samtidigt.

Nu gör vi så här att vi deriverar uttrycket

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

istället. Vi plottade ju denna funktion. Inget rottecken alltså.

Enklare är att arbeta med uttrycket $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$. Vi har ju plottat detta uttryck som en funktion.

$\frac{d}{dx}\left(x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right) \blacktriangleright 2\cdot x-\frac{2\cdot x}{(x-1)^3}$ ⚠

Vi bryter ut 2x eftersom det är en gemensam faktor:

Vi får då $2\cdot x\cdot\left(1-\frac{1}{(x-1)^3}\right)$.

För att uttrycket inom parentesen ska vara noll så måste ju $(x-1)^3$ ha värdet 1 och det gäller ju bara för x=2. Klart!

Nu blev det betydligt enklare. Vi kan direkt lösa ekvationen i huvudet.