# Exercices

## 1 Détermination d'une sphère

Soit $E$ un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé.

Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par $\mathrm{A}\,(1,2,3)$, $\mathrm{B}\,(2,4,-5)$, $\mathrm{C}\,(0,1,-6)$ et $\mathrm{D}\,(-1,0,7)$.

## 2 Distance d'un point à un plan

On considère à nouveau les points $\mathrm{A}\,(1,2,3)$, $\mathrm{B}\,(2,4,-5)$, $\mathrm{C}\,(0,1,-6)$ et $\mathrm{D}\,(-1,0,7)$.
Quelle est la distance du point D au plan défini par A, B et C ?

## 3 Nature d'une application

Quelle est la nature de l'application dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

## 4 Équation d'une conique passant par cinq points

Déterminer l'équation de la conique passant par les cinq points du plan suivants :

$$A(2,0)\,,\ B(0,1)\,,\ C(-1,2)\,,\ D(0,-1)\ \text{ et }\ E(1,1)\,.$$

## 5 Un exercice d'oral

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>b>0$, $F$ son foyer d'abscisse positive. Un point $M$ parcourt l'ellipse. Déterminer le lieu du projeté orthogonal de $F$ sur la tangente à $\mathcal{E}$ en $M$.

## 6 Oral Centrale

On pose $P=2X^3-X^2-X-3$.

a) Trouver les racines $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ de $P$.

b) Montrer que les points d'affixes $\delta$ et $\varepsilon$ racines de $P'$ sont à l'intérieur du triangle $ABC$ points du plan complexe d'affixes respectives $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

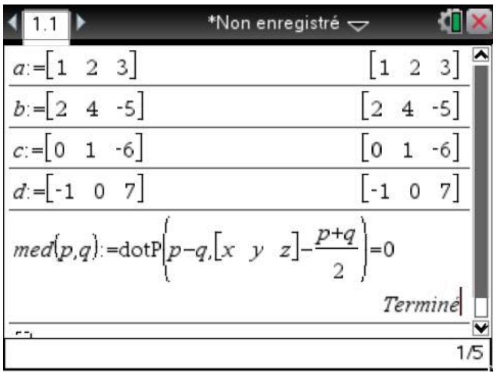
c) Établir l'existence d'une ellipse $(\mathcal{E})$ inscrite dans le triangle $ABC$ et de foyers les points d'affixes $\delta$ et $\varepsilon$.

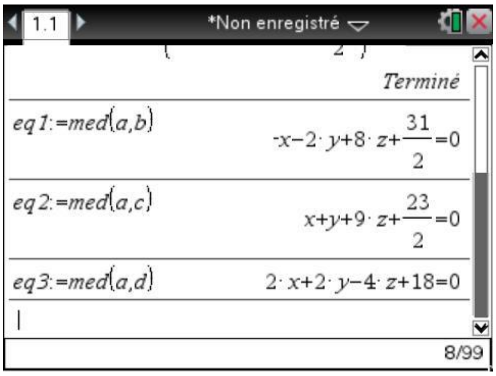
d) Tracer le triangle $ABC$ et l'ellipse $(\mathcal{E})$ dans un même repère.

## Solution des exercices

### 1 Détermination d'une sphère

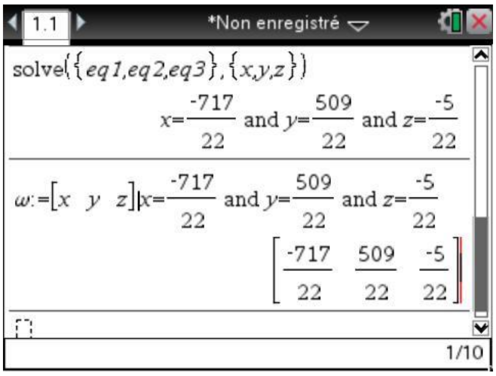
On définit tout d'abord les quatre points, puis la fonction permettant de déterminer l'équation du plan médiateur de deux points. On détermine alors les trois équations des plans médiateurs de (A,B), (A,C) et (A,D).

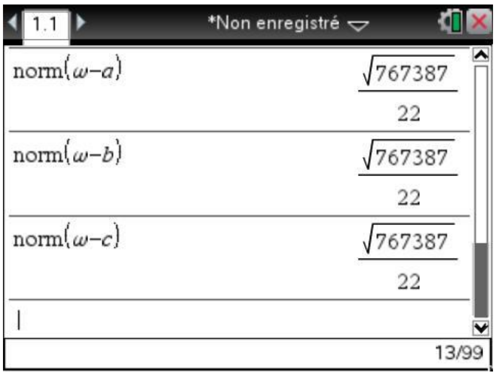



Il suffit de résoudre le système formé par ces trois équations.

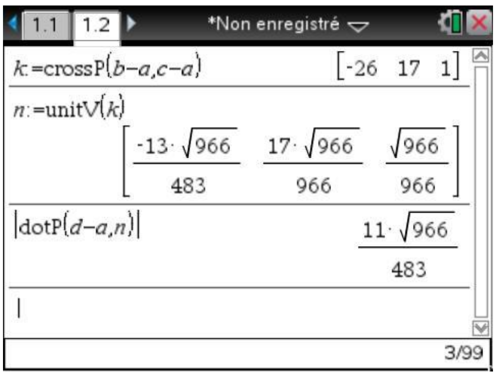
On récupère ensuite les composantes du centre, puis on peut calculer le rayon à partir de la distance entre ce centre et l'un des points de la sphère.




### 2 Distance d'un point à un plan

Les points A, B, C et D ont déjà été définis lors de la correction de l'exercice 1.
On obtient un vecteur normal au plan défini par A, B et C en calculant $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, on peut ensuite obtenir un vecteur normal unitaire $\vec{n}$ en normant ce vecteur. Il suffit alors de calculer la valeur absolue du produit scalaire de $\overrightarrow{AD}$ et de $\vec{n}$ pour déterminer la distance recherchée.



## 3 Nature d'une application

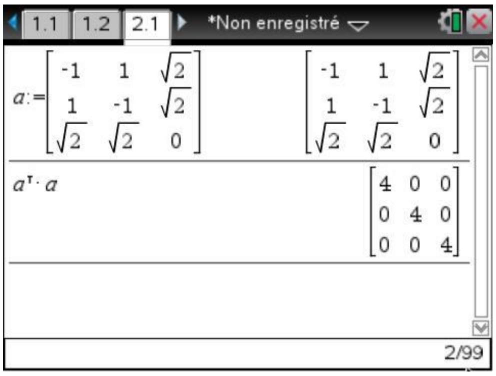
On peut vérifier que ${}^tA \cdot A = 4I$.

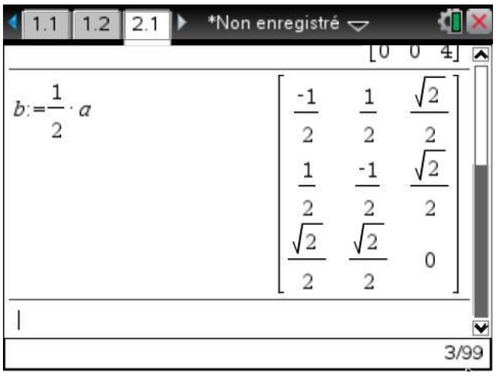
Si on pose $B = \frac{1}{2}A$, on a ${}^tB \cdot B = I$. Cela montre que $B$ est une matrice d'isométrie. De plus $\det(B) = 1$, ce qui montre que $B$ est une rotation.

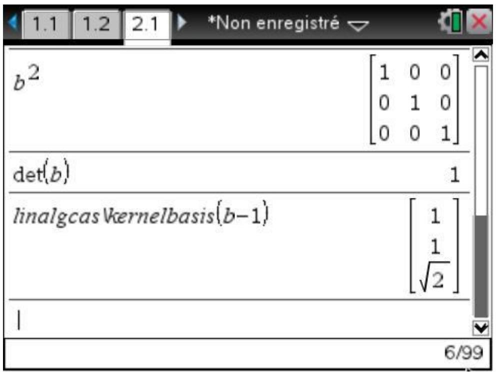
On a enfin ${}^tB = B$ et donc $B^2 = I$, ce qui montre que $B$ est un retournement.

$A$ est donc une similitude directe, composée d'une homothétie de rapport 2 et d'un retournement.

Pour déterminer l'axe de $B$, on peut étudier l'ensemble des vecteurs invariants de $B$ en appliquant **linalgcas\kernelbasis** à la matrice $B - I$, ou obtenir une base de cette droite en calculant la somme entre un vecteur $u$ et son image (sous réserve que cette somme soit non nulle). Dans le cas de $u = e_1(1,0,0)$, cette image est donnée par la première colonne de $B$.




## 4 Équation d'une conique passant par cinq points

Après avoir effacé le contenu des variables utilisées ou avoir ouvert un nouveau classeur ou une nouvelle activité, on pose $P(x, y) = a.x^2 + 2b.x.y + c.y^2 + d.x + e.y + f$.

On doit résoudre le système de 5 équations linéaires, d'inconnues $a, b, c, d, e, f$, obtenu en écrivant que les coordonnées des 5 points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ annulent $P$.

On utilise la fonction **solve** et le modèle obtenu dans . On obtient une suite d'égalités séparées par des **and**. Les solutions sont données à un coefficient multiplicatif près, on obtient donc une équation unique, il suffit de prendre une valeur de ***c1*** différente de 0 pour obtenir l'équation de la conique.

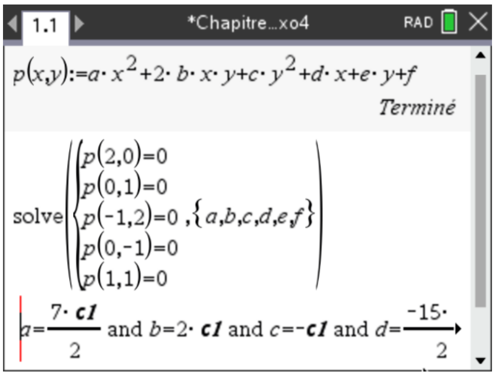
L'écran de gauche ci-dessous s'obtient simplement en entrant :

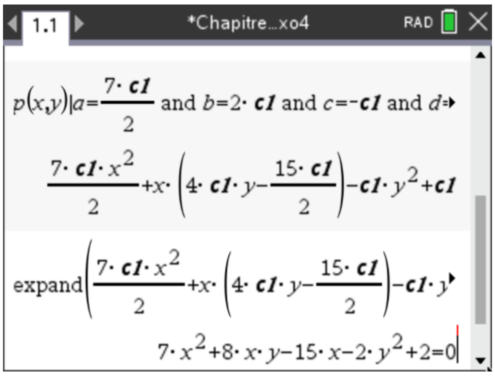
**p(x,y) | ans**

puis

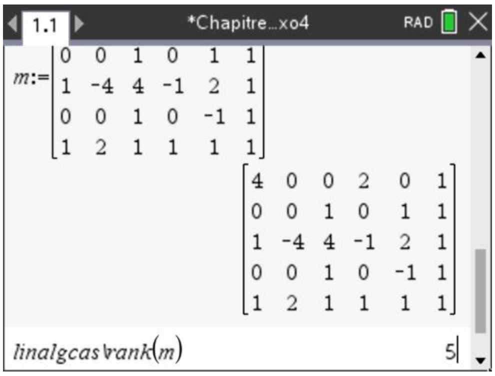
**expand( ans ) = 0 | *c1* = 2**

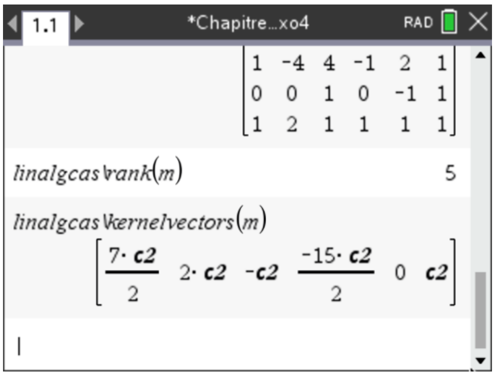
Le symbole **|** (opérateur "sachant que") se trouvent dans la palette accessible à l'aide de la combinaison de touches [ctrl] [|≠≥▸] (seconde fonction de la touche [=]). **ans** ([ctrl] [ans], seconde fonction de la touche [(−)]).




On peut retrouver ce résultat à partir de la matrice m du système :

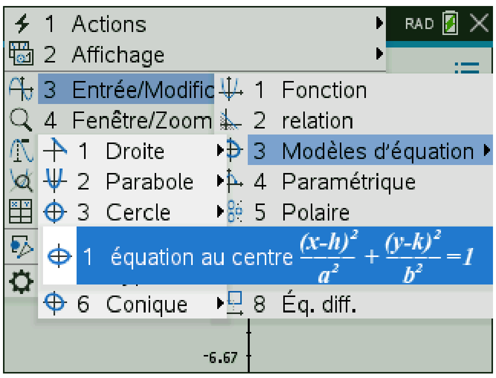


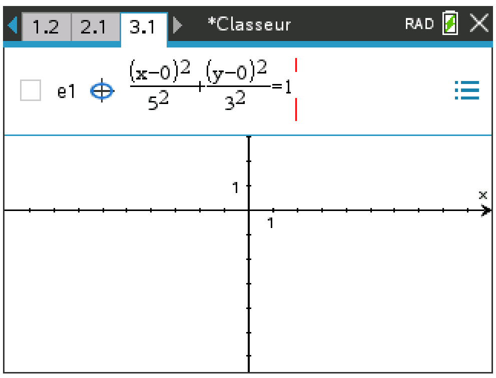




Le rang de la matrice est égal à 5, le noyau est donc de dimension 1. On retrouve les mêmes coefficients en prenant ***c2* = 2** (attention à l'ordre). Pour l'utilisation des matrices et de la bibliothèque **linalgcas** voir le **chapitre 9**.

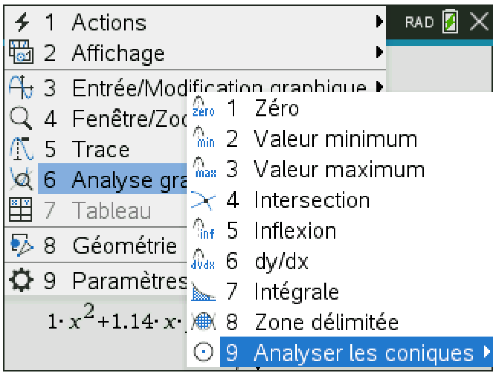
## 5 Un exercice d'oral

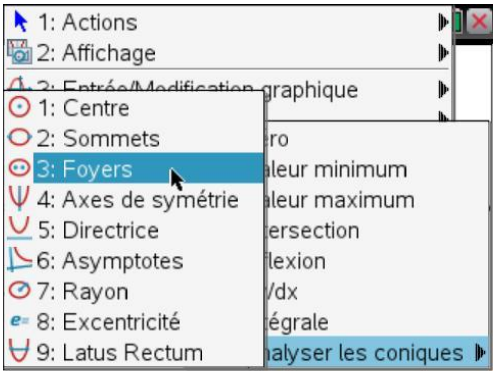
Une figure avec l'application Graphiques permet d'avoir une idée du résultat. Prenons pour cela des valeurs pour $a$ et $b$. Pour le tracé de l'ellipse utilisons : [menu] [3] [3] [4].



Pour placer les foyers : [menu] [6] [9] [3].

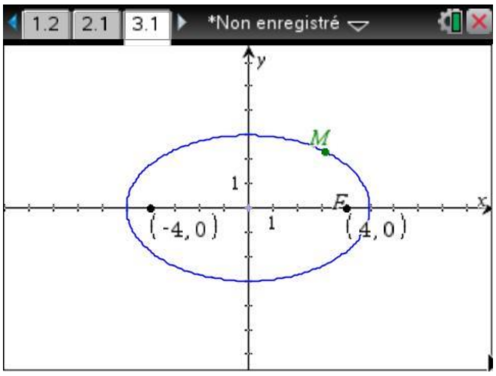


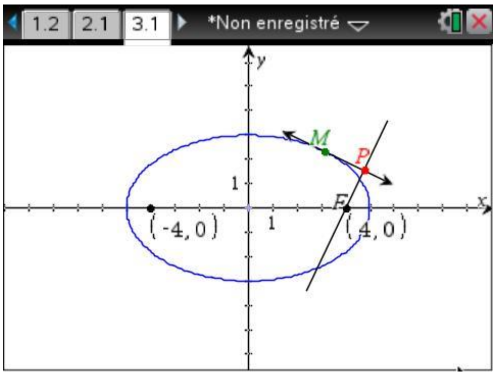




On place le point $M$ sur l'ellipse : [menu] [8] [1] [2], puis on sélectionne l'ellipse.

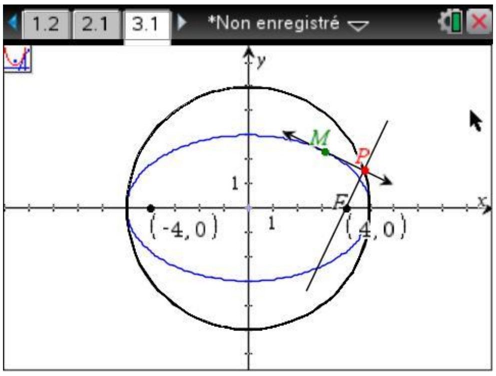
On trace la tangente en $M$ à l'ellipse ([menu] [8] [1] [8]), s'assurer de bien sélectionner le point $M$.

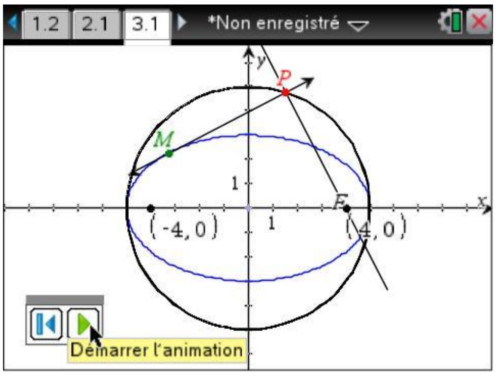
On trace ensuite la perpendiculaire à cette tangente passant par $F$ ([menu] [8] [4] [1], sélectionner le point $F$ puis la tangente).



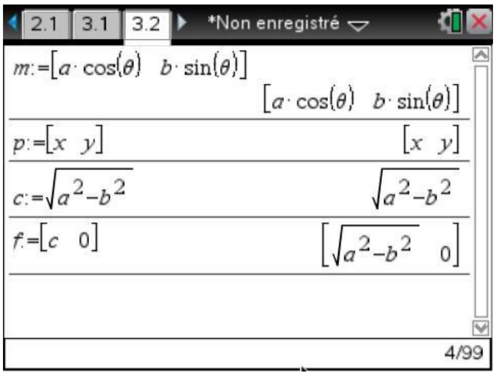

La construction étant terminée, faisons parcourir au point $M$ l'ellipse et déterminons le lieu de $P$ (on peut faire une animation, voir écran suivant à droite).



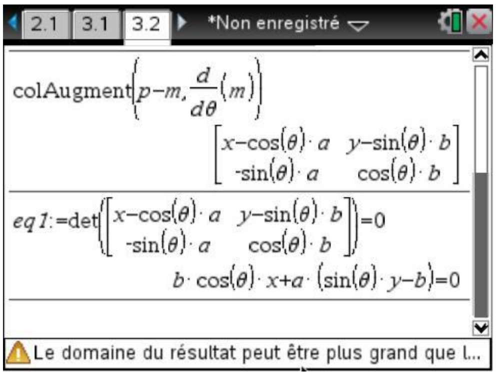

Le lieu de $P$ semble être le cercle de centre l'origine et de rayon $a$ : cercle principal de l'ellipse. Pour s'en persuader, il serait possible de collecter dans un tableau les distances de $O$ à $P$, lorsque $M$ varie et de voir qu'elles sont constantes. Nous allons le démontrer formellement dans l'application Calculs.

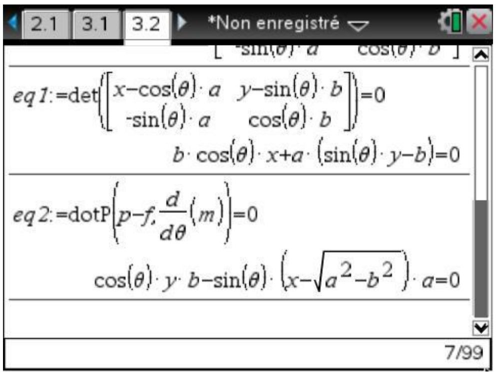
Après avoir créé une nouvelle page, dans un premier temps on entre les données :



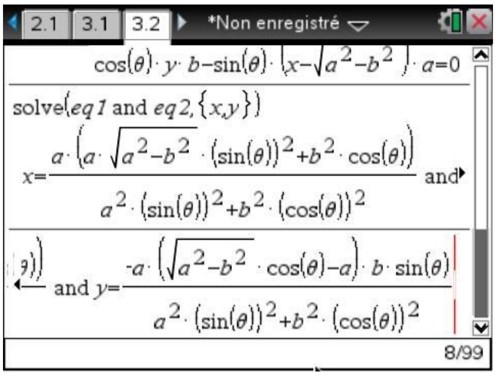

On écrit ensuite que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\dfrac{dm}{d\theta}$, vecteur directeur de la tangente en $M$, sont colinéaires. Pour cela on construit, à l'aide de la fonction **colAugment** (on travaille ici avec des vecteurs lignes), la matrice ayant ces deux vecteurs pour vecteurs lignes et on écrit que le déterminant est nul.

La deuxième équation est donnée en écrivant que les vecteurs $\overrightarrow{FP}$ et $\dfrac{dm}{d\theta}$ sont orthogonaux.



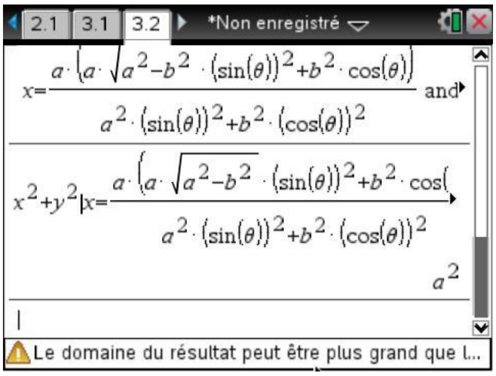




Il ne reste plus qu'à résoudre le système…



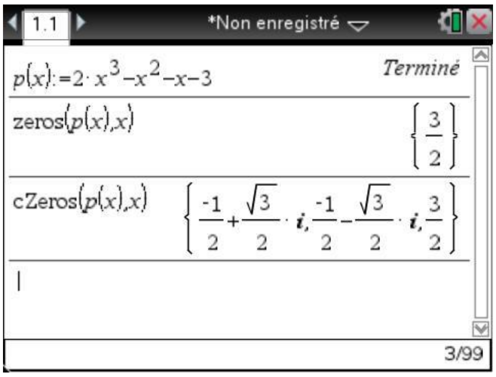

et à vérifier que les coordonnées de $P$ sont bien solution de l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, en tapant tout simplement :

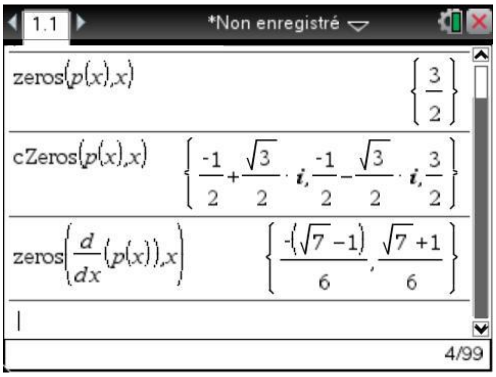
```
x^2+y^2 | ans
```



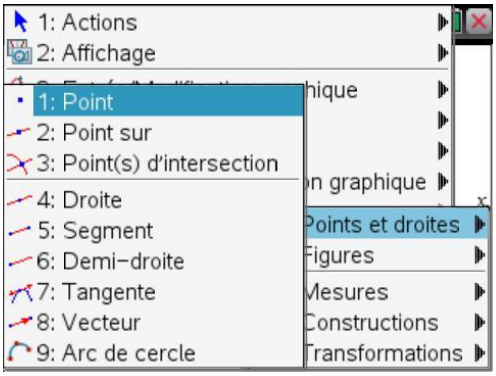

## 6 Oral Centrale

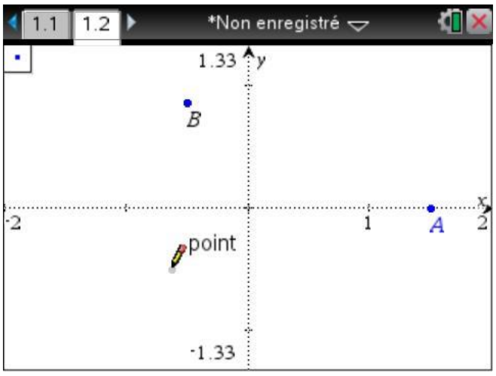
Déterminons les zéros de $P$, il y en a un réel et deux complexes conjugués, ceux de $P'$ sont réels.

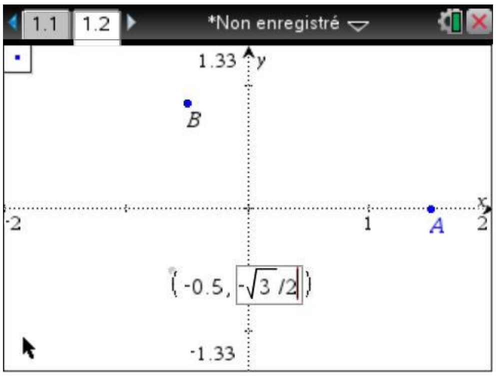


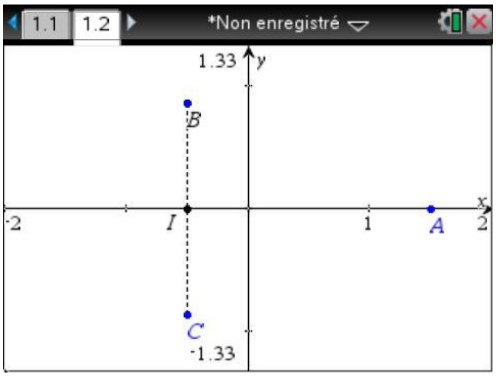




Pour tracer les points, on ouvre une page avec l'application Graphiques, menu 8 1 3, on ne clique pas pour placer le point, on ouvre une parenthèse et on saisit la première coordonnée, on valide et on recommence pour la seconde, on valide le point est placé on peut alors le nommer à la volée (voir écrans page suivante).



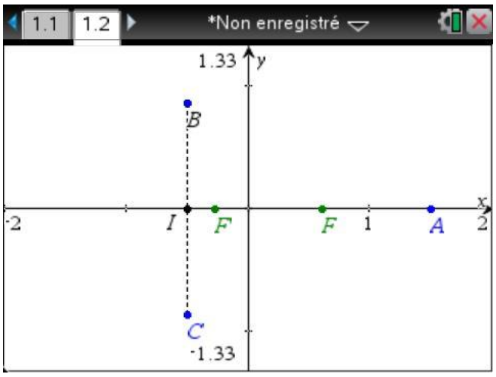





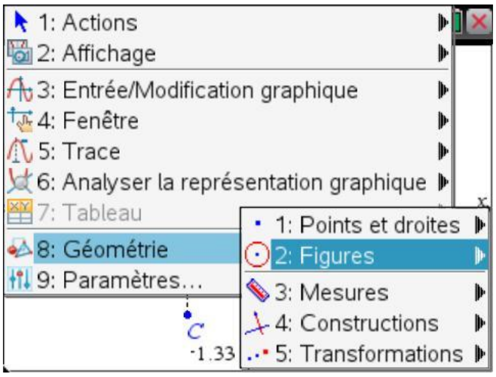



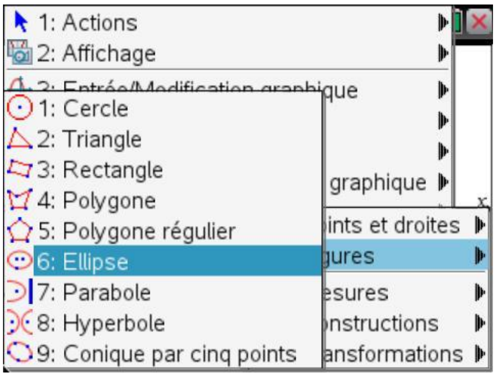

Les points *B* et *C* sont symétriques par rapport à l'axe des *x* (affixes conjuguées), les points d'affixes $\delta$ et $\varepsilon$ sont bien intérieur au triangle *ABC*.

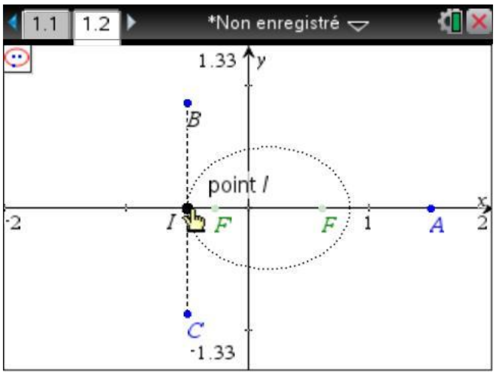
L'axe focal étant l'axe des *x*, l'ellipse devant être tangente au segment *BC*, le point de tangence est forcément le point *I* (un des sommets de l'ellipse).

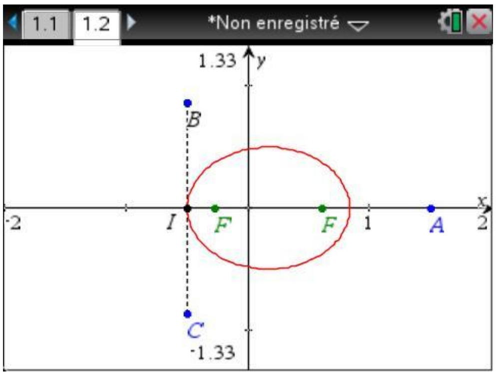



On peut donc construire l'ellipse connaissant ses foyers et un point.

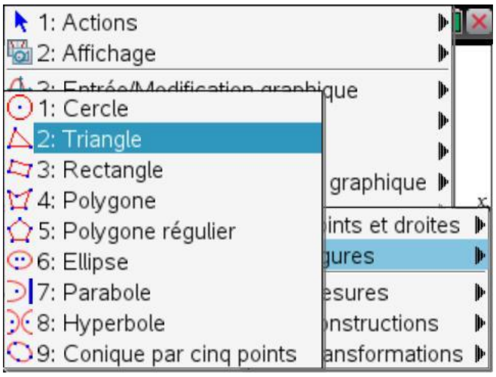


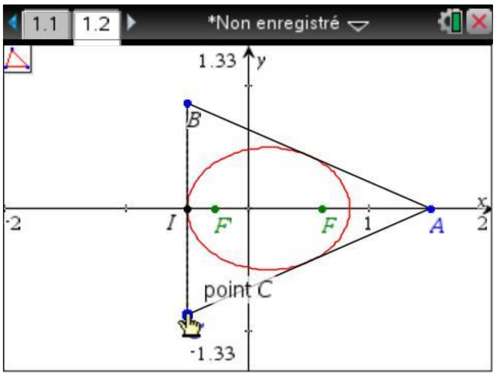



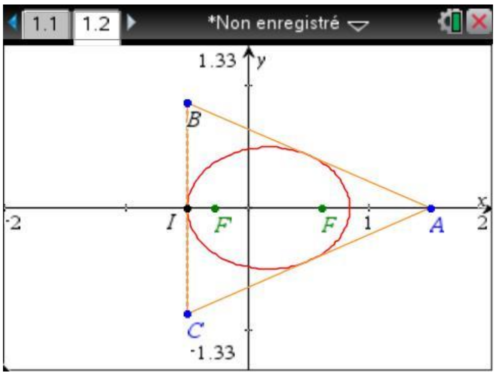




On trace ensuite le triangle *ABC*.

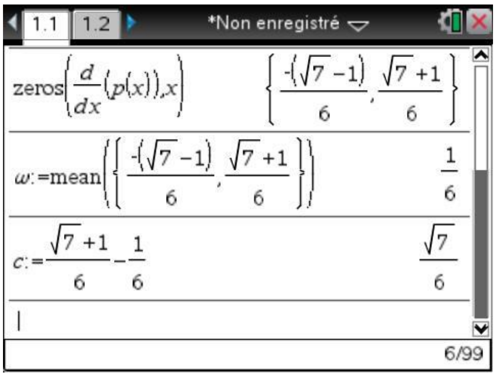


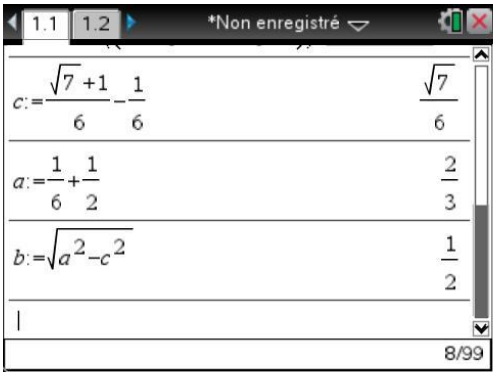




Pour montrer que l'ellipse est bien tangente au segment *AB* et donc par symétrie à *AC*, il suffit de montrer que l'intersection est réduite à un point.

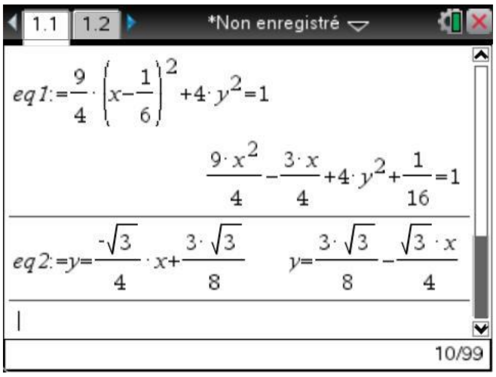
On peut déterminer l'équation de l'ellipse. Le centre se situe au milieu de $FF'$, ce qui donne *c* ; *a* est égal à la distance de *I* au centre et on en déduit *b*.

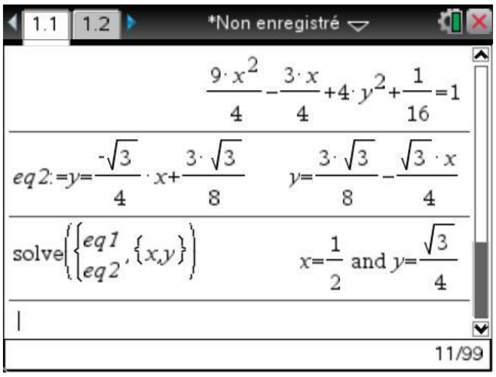



L'équation réduite de $(\mathcal{E})$ est donc : $\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+4y^2=1$ ;

la droite *AB* a pour équation $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{8}$.




Il n'y a qu'un seul point d'intersection, $(\mathcal{E})$ est bien inscrite dans le triangle *ABC*.