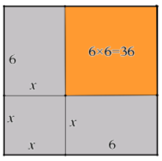
Andragradsekvationer-på djupet

I denna aktivitet går vi igenom vad begreppet kvadratkomplettering innebär. Vi börjar med ett geometriskt bevis. Kvadratkomplettering är en metod för att skriva om andragradsuttryck på en form som ofta är mer användbar än den utvecklade formen $a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Metoden är också användbar i andra sammanhang än att lösa andragradsekvationer, t.ex. för att hitta max-/minpunkter hos andragrads-funktioner.

På de tre första sidorna har vi en ordentlig genomgång av hur kvadratkompettering fungerar.

Olika sätt att lösa andragradsekvationer



Titta på figuren ovan Vi vet att det grå området, som består av tre delar, har en area som är 64 areaenheter. Det kan uttryckas $x^2+6x+6x+64=\mathbf{x^2+12x=64}$.

Vi vet nu inte värdet på x.

Hur ska vi beräkna x? Jo, vi lägger till kvadraten uppe i det högra hörnet så att vi får en stor kvadrat. Så här blir det då:

$x^2+12x+36=64+36$ eller

$x^2+12x+36=100$ .Vi ***kompletterar*** alltså med 36 på båda sidor i ekvationen. Nu kan ju arean av den stora kvadraten också skrivas som $(x+6)^2$ och då gäller att $(x+6)^2=100$. Vi ser att en lösning är $x=4$ men $x=-16$ är ju också en lösning eftersom $(-10)^2=100$.

Om vi utvecklar $(x+6)^2$ med Nspire´s CAS–verktyg får vi

$\text{expand}((x+6)^2) \blacktriangleright x^2+12\cdot x+36$

och det var ju precis det uttrycket vi hade och vi visste att det var lika med 100. Jämför med kvadreringsreglerna:

$\text{expand}((a+b)^2) \blacktriangleright a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$ $\text{expand}((a-b)^2) \blacktriangleright a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Vi tar ännu ett exempel:

Lös ekvationen $\mathbf{x^2-6x+2=0}$. Om vi nu ska få en jämn kvadrat $(\square x+\square)^2$ så måste vi börja med att skriva $(x-3)^2$ eftersom dubbla produkten är 6x. Sedan blir det då $(x-3)^2-7$ eftersom 3 i kvadrat blir 9 och vi ska ha kvar 2 (2−9=−7). Vi ser att det stämmer:

$(x-3)^2-7 \blacktriangleright x^2-6\cdot x+2$

Forts nästa SIDA!

Vi får nu ekvationen $(x-3)^2=7$ vilket direkt ger $x-3=\pm\sqrt{7}$

som ger lösningarna $x=3+\sqrt{7}$ eller $x=3-\sqrt{7}$.

CAS–motorn hos TI–Nspire ger

$\text{solve}((x-3)^2=7,x) \blacktriangleright x=3-\sqrt{7} \text{ or } x=\sqrt{7}+3$

Det första exemplet där vi fick ekvationen $(x+6)^2=100$ ger nu

$\text{solve}((x+6)^2=100,x) \blacktriangleright x=-16 \text{ or } x=4$

Stämmer också med våra beräkningar!

Vi ska nu titta på ett nytt kommando som skriver om ekvationen med den metod vi gått igenom här. Vi börjar med ekvationerna som vi gjort beräkningar på hittills.

I nästa spalt visar vi hur det inbyggda kommandot för kvadratkomplettering fungerar.

Kommandor finns bland algebraverktygen och heter *Kvadratkompettera:*

$\text{completeSquare}(x^2-6\cdot x+2=0,x) \blacktriangleright (x-3)^2=7$

$\text{completeSquare}(x^2+12\cdot x=64,x) \blacktriangleright (x+6)^2=100$

Det stämmer med de beräkningar vi gjorde "för hand".

Nu kan vi göra detta mer generellt och jobba *symboliskt* med koefficienterna.

$\text{completeSquare}(x^2+b\cdot x+c=0,x) \blacktriangleright \left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4\cdot c}{4}$

Högerledet kan skrivas $\frac{b^2}{4}-c$

TI_Nspire skriver här uttrycket till höger om likhets-tecknet med gemensam nämnare.

Nedan finns ännu ett exempel där man kan jämföra med det allmänna uttrycket. Vi får här:

$$\left(x+\frac{-6}{2}\right)^2=\frac{(-6)^2}{4}-(-7)$$ vilket förenklas till

$$(x-3)^2=\underbrace{9-(-7)}_{16}$$

Vi tar ännu ett exempel där koefficienten framför kvadrattermen inte är 1: $2\cdot x^2-12\cdot x-14=0$.

Här dividerar man lämpligen först med 2 i båda led och får då $x^2-6\cdot x-7=0$.

$\text{completeSquare}(x^2-6\cdot x-7=0,x) \blacktriangleright (x-3)^2=16$.

Stämmer det med det generella uttrycket från förra sidan. Tänk på tecknen här och att $b=-6$ och $c=-7$. Jämför åter med det allmänna

uttrycket: $\text{completeSquare}(x^2+b\cdot x+c=0,x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c$

Pröva nu med några egna exempel som du t.ex. kan plocka från din egen lärobok.

Här visar vi resultatet när man löser ekvationen $x^2+p\cdot x+q$. Man får göra en del omskrivningar för att få lösningen på den form man vanligtvis ser i läro-böcker.

Vi har några gånger på de tidigare sidorna använt kommandot *solve()*, som direkt löser ekvationer. Om vi nu skriver ekvationen på formen $x^2+p\cdot x+q=0$ och använder kommandot *solve* får vi

$\text{solve}(x^2+p\cdot x+q=0,x) \blacktriangleright x=\frac{\sqrt{p^2-4\cdot q}-p}{2} \text{ or } x=\frac{-\left(\sqrt{p^2-4\cdot q}+p\right)}{2}$

Vi kan skriva om uttrycken och sätta det som kommer utanför rottecknet först och sedan flytta det som står i nämnaren under rottecknet. Då får vi:

$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ eller $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ "pq–formeln"

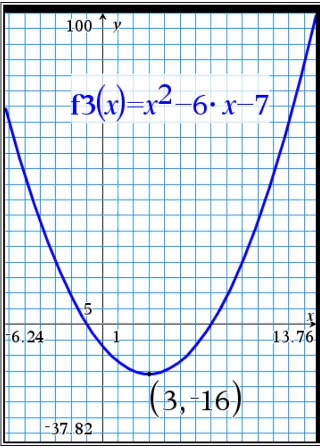
Ibland står inte andragradsekvationen på den form som vi behöver för att kunna använda *pq–formeln* – koefficienten framför x^2–termen är t.ex. inte lika med 1. Då dividerar vi samtliga termer i ekvationen med koefficienten framför x^2–termen.

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \;\blacktriangleright\; a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$

$\text{expand}\left(\dfrac{a\cdot x^2+b\cdot x+c=0}{a}\right) \;\blacktriangleright\; x^2+\dfrac{b\cdot x}{a}+\dfrac{c}{a}=0$ ⚠

$\text{solve}\left(x^2+\dfrac{b\cdot x}{a}+\dfrac{c}{a}=0,x\right)$

$\blacktriangleright\; x=\dfrac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}-b}{2\cdot a} \text{ or } x=\dfrac{-\left(\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}+b\right)}{2\cdot a}$



$\text{completeSquare}(f3(x),x)$

$\blacktriangleright\; (x-3)^2-16$

Vi ser att det minsta värde som funktionen kan anta är −16 eftersom det minsta värdet hos $(x-3)^2$ är noll. En kvadrat kan ju inte anta ett negativt värde. Det minsta värdet hos funktionen antas när x=3. Se graf till vänster.

Man kan naturligtvis utgå från uttrycken ovan när man löser ekvationer även om koefficienten *a* är 1. I t.ex. amerikanska läroböcker verkar det vara vanligt. Se nedan. I Sverige verkar pq-formeln vara cementerad. Det viktiga är ju dock att man förstår vad man håller på med och att de lösningsformler man använder utgår från kvadratkomplettering.

- Or we can Complete the Square
- Or we can use the special **Quadratic Formula**:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Just plug in the values of a, b and c, and do the calculations.

We will look at this method in more detail now.

Här är två andra sätt att finna rötter till en andragradsekvation. Faktorisering resp. ett verktyg som finner rötterna till ett polynom (uttryck med heltalskoefficienter):

$\text{factor}\left(2\cdot x^2-12\cdot x-14=0\right) \;\blacktriangleright\; 2\cdot(x-7)\cdot(x+1)=0$

$\text{polyRoots}\left(2\cdot x^2-12\cdot x-14,x\right) \;\blacktriangleright\; \{-1,7\}$

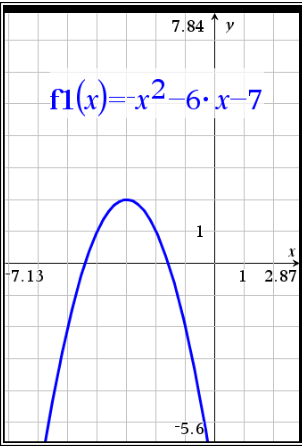
Kontroll: $\text{expand}\left(2\cdot(x-7)\cdot(x+1)\right) \;\blacktriangleright\; 2\cdot x^2-12\cdot x-14$

På nästa sida visar vi hur man med utttrycket man får vid kvadratkomplettering kan beräkna visss saker om motsvarande andragradsfunktion.

TI-Nspire har ett stort antal kommandon för algebra. Ovan visar vi 2 st. som är användbara för att lösa andragradsekvationer.

Uttrycket man får vid kvadratkompettering ger direkt information om max- och minpunkter. Om man känner till funktionens nollställen så vet man också att vertex finns precis i mitten mellan nollställena.

Eleverna kan också t.ex. pröva med funktionen $f(x)=-x^2-6x-7$ som har ett maxvärde.



$\text{completeSquare}(f1(x),x)$ $\quad 2-(x+3)^2$

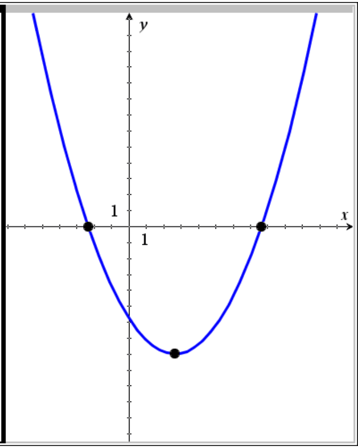
©maxvärde för x=−3

$\text{completeSquare}(f1(x)=0,x)$ $\quad -(x+3)^2=-2$

© nollställen för $x=\sqrt{2}-3$ och $x=-\sqrt{2}-3$

Vi avslutar med en utmaning där eleverna ska arbeta helt algebraiskt. Hur beräknar man *x*-koordinaten för minpunkten nedan om man känner till uttrycken för nollställena.

Här kommer nu en verklig utmaning. Du har en funktion $x^2+b\cdot x+c$. Utifrån nollställena, som du får beräkna med verktyget *solve*, ska du nu beräkna värdet på funktionens vertex (max eller min) helt *algebraiskt*.



På nästa sida visar vi en lösning till problemet. Det finns säkert fler lösningar. Många elever kan säkert hitta fler.

Define $f(x)=x^2+b\cdot x+c$ ▸ *Klar*

solve$(f(x)=0,x)$ ▸ $x=\frac{\sqrt{b^2-4\cdot c}-b}{2}$ or $x=\frac{-(\sqrt{b^2-4\cdot c}+b)}{2}$

För att beräkna x-koordinaten för max-/minpunkten så beräknar vi först halva avståndet mellan nollställena:

$$\frac{\frac{\sqrt{b^2-4\cdot c}-b}{2}-\frac{-(\sqrt{b^2-4\cdot c}+b)}{2}}{2} \blacktriangleright \frac{\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}$$

Sedan lägger vi till *x*-värdet för den vänstra nollstället

$$\frac{\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}+\frac{-(\sqrt{b^2-4\cdot c}+b)}{2} \blacktriangleright \frac{-b}{2} \quad ⚠ \quad f\left(\frac{-b}{2}\right) \blacktriangleright c-\frac{b^2}{4}$$

En del elever kan ha problem med att förstå hur man kommer fram till att funktionsvärdet blir $c-b^2/4$.

Visa då beräkningen utan hjälp av CAS hos TI-Nspire.

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2+b\cdot(-b/2)+c=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+c=c-\frac{b^2}{4}$$

Något om ekvationer med nämnare

När löser ekvationer med nämnare och får lösningar som ger noll i nämnaren så är det s.k. *falska rötter* som ekvationen inte är definierad för. De uppträder ofta då man "multiplicerar upp" nämnare.

Vi visar nedan några skärmbilder där vi arbetat i för steg och kommit fram till uttryck på formen $ax^2+bx+c=0$. Man börjar med att mata in ekvationen och trycker sedan på enter. Det betyder att själva ekvationsuttrycket lagras i variabeln ***ans***. Om du nu t.ex. trycker på multiplikationstangenten så står det

Ans·

på skärmen. Man kan ju inte börja en beräkning med att trycka på multiplikationstangenten. Samma sak gäller de andra räknesätten (+ - /). Nedan har det alltså stått Ans+5 på andra raden och Ans/2 på tredje raden. Det som står till höger är ju lagrat i ***ans***.

$2\cdot x-5=17$	$2\cdot x-5=17$
$(2\cdot x-5=17)+5$	$2\cdot x=22$
$\frac{2\cdot x=22}{2}$	$x=11$

Om vi gjort en beräkning och sedan vill dra roten ur resultatet, som är lagrat i ***ans***, så infogar vi rotsymbolen och skriver ***ans***. Först får vi det exakta värdet $\frac{\sqrt{55}}{4}$ och om vi trycker på Ctrl och enter samtidigt får vi ett närmevärde.

$\frac{3}{16}\cdot 5^3-20$	$\frac{55}{16}$
$\sqrt{\text{ans}}$	

$\frac{3}{16}\cdot 5^3-20$	$\frac{55}{16}$
$\sqrt{\frac{55}{16}}$	$\frac{\sqrt{55}}{4}$
$\frac{\sqrt{55}}{4}$	1.85405

Ans-funktionen kan användas på ett effektivt sätt även när man förenklar komplicerade ekvationsuttryck. Vi har här använt kommandot *expand* (*utveckla* i den svenska verktygsmenyn). Totalt 4 steg för att komma fram till ett uttryck på formen $ax^2+bx+c=0$.

$\frac{x}{x+3}=\frac{8}{x+6}$	$\frac{x}{x+3}=\frac{8}{x+6}$
⚠ $\left(\frac{x}{x+3}=\frac{8}{x+6}\right)\cdot(x+3)$	$x=\frac{8\cdot(x+3)}{x+6}$
⚠ $\left(x=\frac{8\cdot(x+3)}{x+6}\right)\cdot(x+6)$	$x\cdot(x+6)=8\cdot(x+3)$
expand$(x\cdot(x+6)=8\cdot(x+3))$	$x^2+6\cdot x=8\cdot x+24$
$(x^2+6\cdot x=8\cdot x+24)-(8\cdot x+24)$	$x^2-2\cdot x-24=0$

$\frac{5}{3-2\cdot x}-\frac{1}{3}=\frac{2\cdot x}{2\cdot x-1}$	$\frac{-5}{2\cdot x-3}-\frac{1}{3}=\frac{2\cdot x}{2\cdot x-1}$
$\left(\frac{-5}{2\cdot x-3}-\frac{1}{3}=\frac{2\cdot x}{2\cdot x-1}\right)\cdot(3-2\cdot x)$	$\frac{2\cdot(x+6)}{3}=\frac{-2\cdot x\cdot(2\cdot x-3)}{2\cdot x-1}$
$\left(\frac{2\cdot(x+6)}{3}=\frac{-2\cdot x\cdot(2\cdot x-3)}{2\cdot x-1}\right)\cdot(2\cdot x-1)$	$\frac{2\cdot(x+6)\cdot(2\cdot x-1)}{3}=-2\cdot x\cdot(2\cdot x-3)$
$\left(\frac{2\cdot(x+6)\cdot(2\cdot x-1)}{3}=-2\cdot x\cdot(2\cdot x-3)\right)\cdot 3$	$2\cdot(x+6)\cdot(2\cdot x-1)=-6\cdot x\cdot(2\cdot x-3)$
$\text{expand}(2\cdot(x+6)\cdot(2\cdot x-1)=-6\cdot x\cdot(2\cdot x-3))$	$4\cdot x^2+22\cdot x-12=18\cdot x-12\cdot x^2$
$(4\cdot x^2+22\cdot x-12=18\cdot x-12\cdot x^2)+12\cdot x^2$	$16\cdot x^2+22\cdot x-12=18\cdot x$
$(16\cdot x^2+22\cdot x-12=18\cdot x)-18\cdot x$	$16\cdot x^2+4\cdot x-12=0$

Här en sida med ett ganska krångligt uttryck. Den vänstra spalten ska man inte titta sig blind på. Den visar den interna CAS-processerna. Det som står inom parentes där är vad som är lagrat i ans-variabeln.

Ge gärna eleverna några uttryck att träna på. Efter ett par exempel känner de flesta sig ganska trygga med detta sätt att förenkla ekvationsuttryck.