

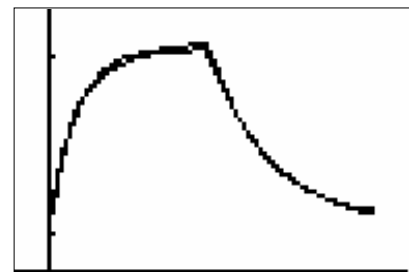
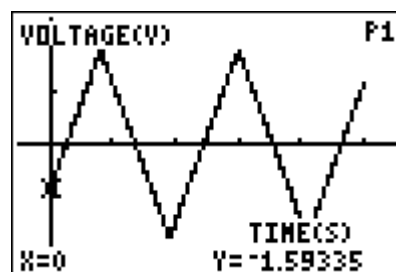
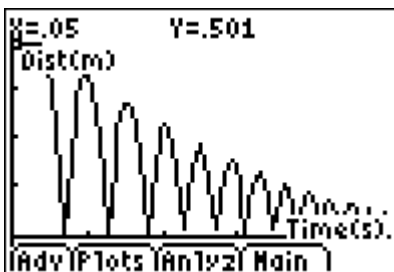


T<sup>3</sup> VLAANDEREN

# Wiskunde vanuit fysicatoepassingen

Begrippen i.v.m. functies vanuit concrete experimenten

*Dominiek Ramboer*





## Inleiding

Volgens de leerplannen moeten wiskundige begrippen zoveel mogelijk in concrete situaties toegepast worden.

De voorbeelden die in handboeken gebruikt werden, lieten me altijd met de vraag zitten, hoe komt men tot die voorschriften; is het wel zo dat de voorschriften echt de situatie beschrijven in de vooropgestelde context.

Vandaar is de zoektocht begonnen om aan de hand van heel eenvoudig uit te voeren experimenten te komen tot voorschriften die heel nauw samenhangen met de werkelijke situatie.

De beschreven experimenten vragen weinig materiaal en zeker geen ingewikkelde opstellingen; er wordt bij de meeste experimenten enkel gebruik gemaakt van CBR of CBL2 en de sensoren met name de lichtsensor, de temperatuursensor en de spanningssensor, die erbij geleverd worden. Twee experimenten vergen 2 andere sensoren: de druksensor en de microfoon. De uitvoering vraagt weinig tijd en is niet ingewikkeld. Dit uitvoeren van de experimenten kan in de klas of op voorhand gebeuren. De lijsten met de meetresultaten kunnen opgespaard worden en achteraf opnieuw gebruikt worden. Voor het uitvoeren van de metingen zijn er twee applicaties die gebruikt worden namelijk EASYDATA en DATAMATE. Beide applicaties kunnen gratis gedownload worden vanaf de website van Texas Instruments: [education.ti.com/](http://education.ti.com/). Deze applicaties zorgen voor de instellingen van de sensoren en het opzetten en het uitvoeren van de experimenten.

Ook wordt er bij verschillende experimenten gebruik gemaakt van de applicatie Transfrm. (ook gratis te downloaden op de website van Texas Instruments). Deze applicatie maakt het mogelijk door gebruik te maken van parameters en deze één voor één te veranderen, een voorschrift te transformeren tot een voorschrift passend bij het model van de grafiek.

Een overzicht van de besproken experimenten en wat ze proberen aan te tonen, vind je in de onderstaande tabel:

<b>Nummer</b>	<b>Naam van het experiment</b>	<b>Toepassing op</b>
Experiment 1a	Wet van ohm	Recht evenredig verband (eerstegraadsfunctie)
Experiment 1b	Veerconstante	
Experiment 2	Wet van Boyle-Mariotte	Omgekeerd evenredig verband
Experiment 3	Lichtintensiteit	
Experiment 4	Botsende bal	Tweedegraadsfunctie
Experiment 5	Rollende bal	
Experiment 6	Lichtintensiteit van een TL-lamp	Periodieke functies
Experiment 7	Daar zit muziek in (geluid)	
Experiment 8a	Massa aan een veer 1	Sinusfunctie
Experiment 8b	Slingerbeweging	
Experiment 9	Gedempte harmonische trilling	Exponentiële functie
Experiment 10a	Afkoeling	Exponentiële functies en asymptoten
Experiment 10b	Opwarming	

**N.B.**

- Voor mensen die nog in het bezit zijn van een TI 83 Plus (silver edition) kunnen geen gebruik maken van de applicatie EASYDATA. Zij kunnen de applicatie CBL/CBR downloaden en kiezen dan voor 3: RANGER. Op die manier kunnen ze dan ook de experimenten uitvoeren die alleen gebruik maken van de CBR.  
Indien je over een CBL2 beschikt kan de CBR ook gekoppeld worden aan de CBL2 en van daaruit gestuurd worden met de applicatie DATAMATE.
- Niet alle experimenten zijn helemaal uitgewerkt. Ze zijn allemaal al uitgetest en leveren mooie, geschikte resultaten op. Ze zijn vooral opgenomen om een aantal varianten aan te geven om bepaalde functies aan te brengen. Zo wordt bijvoorbeeld bij de experimenten handelend over periodieke bewegingen ruimte gelaten om eventueel ook de algemene sinusfunctie te bespreken en de nodige transformaties te bestuderen die nodig zijn om vertrekkend van de basisfunctie voor sinus tot de algemene vorm te komen.

- Het is niet nodig om de experimenten voor te doen in de klas. De experimenten kunnen vooraf gedaan worden en de meetresultaten kunnen opgespaard worden. Deze kunnen dan in de klas aan de leerlingen doorgegeven worden. De wiskundige analyse van de meetresultaten kan verder in de klas afgehandeld worden. Het is toch aan te raden dat de leerlingen ook waarnemen hoe de meetresultaten verkregen worden. De leerlingen kunnen zelf ook de experimenten uitvoeren. Dit kan de onderzoeksspirit alleen maar aanwakkeren. Deze experimenten kunnen ingepast worden binnen de onderzoekscompetenties. De meeste experimenten hebben een slaagkans van bijna 100%. Bij de botsende bal kan het wel wat duren vooraleer een aanvaardbaar resultaat verkregen wordt. Voor de experimenten met licht wordt best gezocht naar een lokaal dat verduisterd kan worden.
- Misschien bieden de experimenten opportuniteiten om samen te werken met de leerkracht fysica. Dit kan leiden tot geïntegreerde projecten, waarbij zowel de wiskunde als de fysica belicht kan worden.

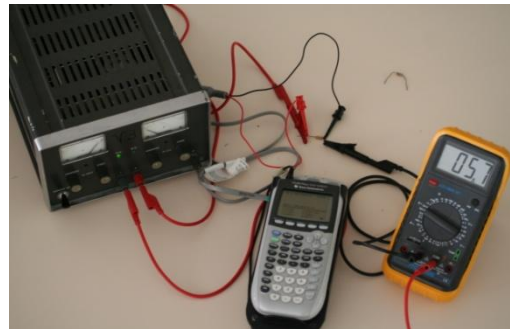
## Inhoudsopgave

Inleiding.....	1
1 Experiment 1a: Wet van Ohm .....	5
2 Experiment 1b: Veerconstante .....	9
3 Experiment 2: Wet van Boyle-Mariotte .....	12
4 Experiment 3: Lichtintensiteit.....	16
5 Experiment 4: Botsende bal .....	21
6 Experiment 5: De rollende bal .....	26
7 Experiment 6: Lichtintensiteit bij een TL-lamp .....	30
8 Experiment 7: Daar zit muziek in.....	32
9 Experiment 8a: Massa aan een veer.....	36
10 Experiment 8b: De slingerbeweging .....	39
11 Experiment 9: Gedempte harmonische trilling .....	42
Deel 1: Het modelleren van een cosinuskrumme .....	43
Deel 2: Het modelleren van de afname van de amplitude. ....	43
Deel 3: Uiteindelijk model van de gedempte harmonische trilling.....	44
12 Experiment 10: Opwarming en afkoeling.....	45
Deel 1: Opwarming.....	45
Deel 2: Afkoeling.....	46
Deel 3: Een stuksgewijs gedefinieerde functie .....	47

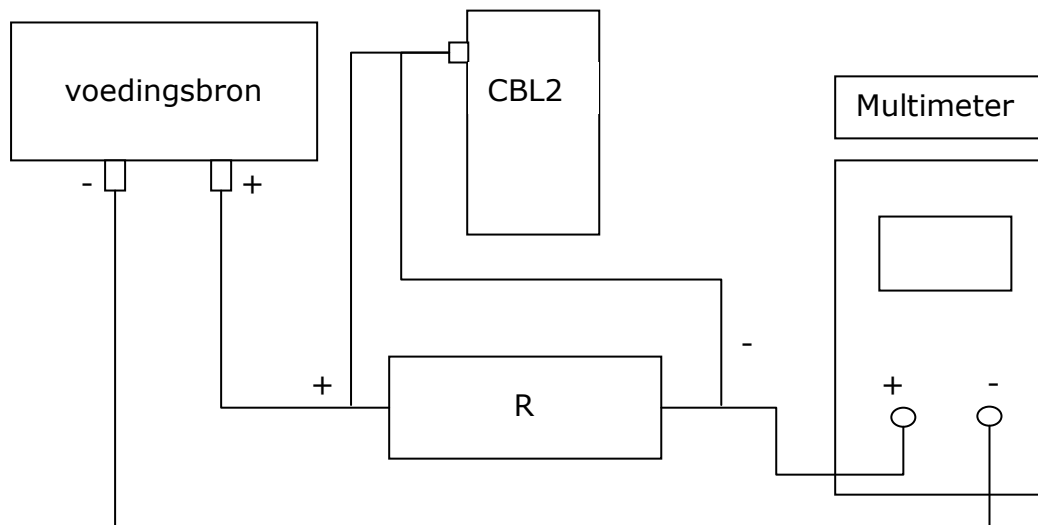
# 1 Experiment 1a: Wet van Ohm

## Benodigdheden:

- Spanningsbron (regelbare spanning, gelijkstroom).
- Een aantal weerstanden met verschillende weerstandswaarde (klein ( $100\Omega$ ), middelgroot ( $220\Omega$ ) en groot ( $1k\Omega$ )).
- Een multimeter om de stroomsterkte te meten.
- CBL2 met spanningssensor.
- Wat klemmen en snoeren om de verbindingen te kunnen maken.



Schema: Realiseer het volgende schema: (gelijkspanning max 10V)



Onderstaande tabel kan helpen bij het onderscheiden van de verschillende waarden voor weerstanden.

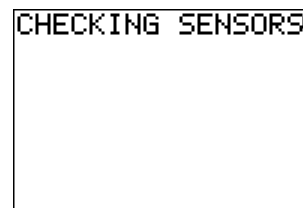
$1\Omega$	Zwart, bruin, zwart
$10\Omega$	Bruin, zwart, zwart
$100\Omega$	Bruin, zwart, bruin
$220\Omega$	Rood, rood, bruin
$1k\Omega$	Bruin, zwart, rood
$10k\Omega$	Bruin, zwart, oranje
$100k\Omega$	Bruin, zwart, geel

100Ω	$\frac{10V}{100\Omega} = 0.1A$
220Ω	$\frac{10V}{220\Omega} = 0.04545...A$
1kΩ	$\frac{10V}{1k\Omega} = 0.01A$

Stel de multimeter in op het gepaste meetbereik. Namelijk stroomsterkte bij gelijkspanning en neem een voldoende grote waarde om zeker te zijn dat we het toestel niet beschadigen. Indien de instelwaarde te groot is kunnen we die trapsgewijs verminderen tot we een goede afleeswaarde krijgen. Let op de polariteiten bij het aansluiten van de verschillende toestellen (rood= positief, zwart = negatief).

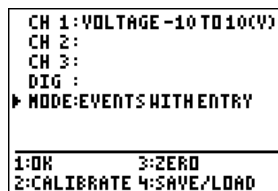
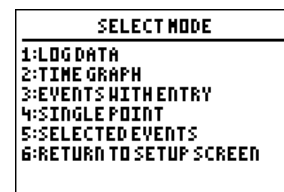
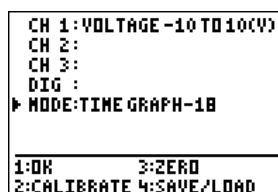
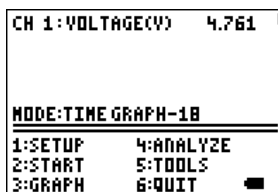
Werkwijze:

1. We starten op de rekenmachine de applicatie DATAMATE op. Dan verschijnt er op het scherm de boodschap CHECKING SENSORS. Na een poosje krijgen we het volgende scherm.



2. We maken de volgende instellingen voor de metingen.
  - Druk 1: SETUP
  - Druk 1 maal ^ om te komen bij MODE: en druk op **ENTER**
  - Kies 3: EVENTS WITH ENTRY
  - Druk 1: OK

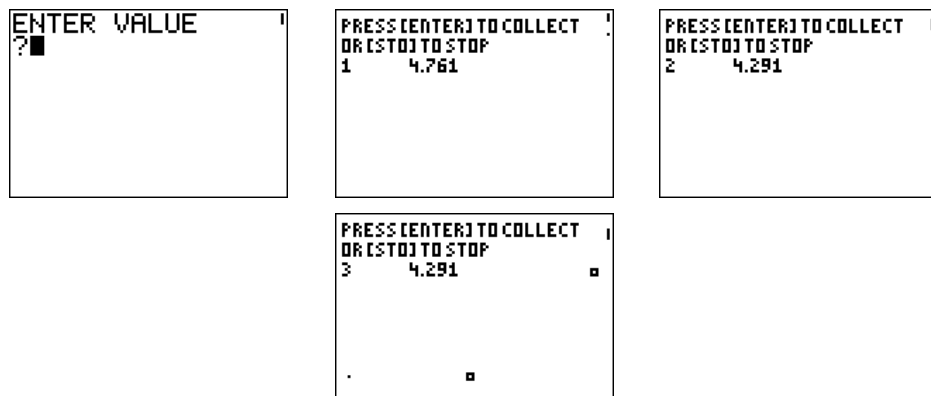
We komen zo terug in het basisscherm.



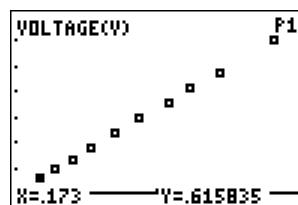


3.

- Om de metingen te beginnen, stellen we de spanningsbron in op een spanning van 1V.
- Druk op 2: START om het vergaren van data te beginnen. Er verschijnt een nieuw scherm waarin de waarde van de spanning wordt aangegeven. Wanneer deze waarde gestabiliseerd is, drukken we op **ENTER**. De waarde van de spanning wordt nu opgeslagen.
- De rekenmachine vraagt nu naar een waarde van de stroomsterkte. Die waarde moeten we zelf invoeren. We lezen de waarde af op de multimeter. Vul deze waarde in op de rekenmachine en sluit af met **ENTER**.
- We stellen de stroombron op 1V hoger in (2V) en herhalen de hele procedure. Dit doen we verder met stappen van 1 V tot aan 10V. Telkens we een meetbeurt ingevoerd hebben, verschijnt het meetpunt op het scherm. Het opmeten wordt afgesloten door **STO▶** in te drukken in plaats van **ENTER** wanneer het toestel de volgende waarde van de spanning weergeeft.

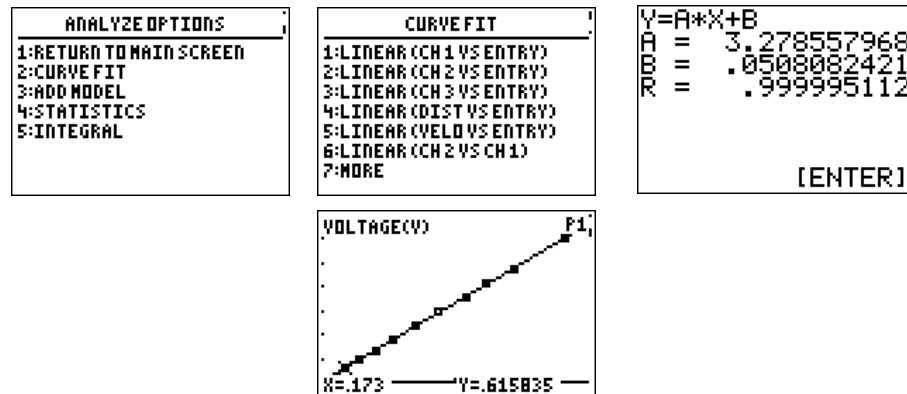


- Nu wordt automatisch een grafiek getoond met alle tien de meetpunten. We merken dat de meetpunten nagenoeg op een rechte lijn liggen. Hierbij zijn de ingevoerde waarden (stroomsterkte) op de x-as voorgesteld en de waarden van de spanning volgens de y-as uitgezet.



We proberen nu de vergelijking van de rechte te bepalen. Druk daarom op **ENTER**.

- Selecteer 4: ANALYSE, 2: CURVEFIT en 1: LINEAR (CH1 vs ENTRY). Na een poosje verschijnen de coëfficiënten voor de vergelijkingen van de rechte A: coëfficiënt voor  $x^1$  en B: coëfficiënt voor  $x^0$ . De ander waarde R is de correlatiecoëfficiënt. (zie statistiek)



- Druk op **ENTER** om terug in het basisscherf te komen.
- Druk 6: QUIT om de toepassing te verlaten.

Herhaal de ganse procedure voor andere waarden van de weerstand. Noteer de waarden van A en B tot 5 decimalen (hou rekening met de eenheden)

- Construeer in het grafische venster verschillende rechten rekening houdend met de wet van ohm.
- Wat is de natuurkundige betekenis van de waarde A?
- Wat is de wiskundige betekenis van de waarde A?
- Wat is het verband tussen de waarde van A en de helling van de rechte?
- Wat is de wiskundige betekenis van de coëfficiënt B?
- Wat zou de waarde van B moeten zijn volgens het experiment (wet van ohm)?

Formuleer een algemeen besluit over de betekenis van A en B voor de grafiek van een rechte.

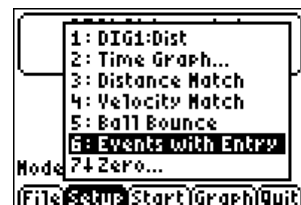
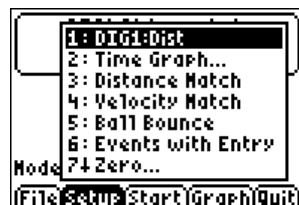
## 2 Experiment 1b: Veerconstante

### Benodigdheden:

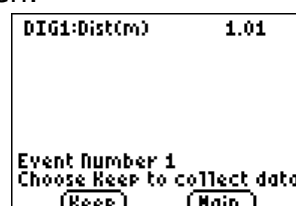
- Een statief waaraan een veer kan bevestigd worden.
- Een veer (met een te grote veerconstante).
- Een schaalpje om aan de veer vast te maken.
- Een voldoende aantal sluitringetjes (rondelletjes) of andere voorwerpen met een gelijke massa.
- Grafische rekenmachine TI-84 Plus of aanverwant.
- CBR of CBL2.

### Opstelling:

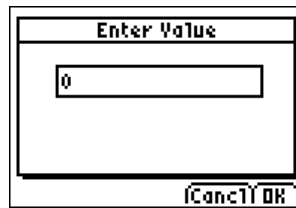
- Plaats het statief op de rand van de tafel. Verzwaar de voet eventueel door het aanbrengen van een supplementaire massa.
- Bevestig de veer aan het statief en het schaalpje aan de veer.
- Positioneer de CBR op de grond onder het schaalpje. Zorg er voor dat er niets op de CBR valt.
- Sluit de CBR aan op de rekenmachine.
- Start de applicatie EASYDATA
- Maak de volgende instellingen:
  - Druk op **WINDOW** (SETUP) om een experiment op te zetten. Kies daarbij 3: EVENTS WITH ENTRY.



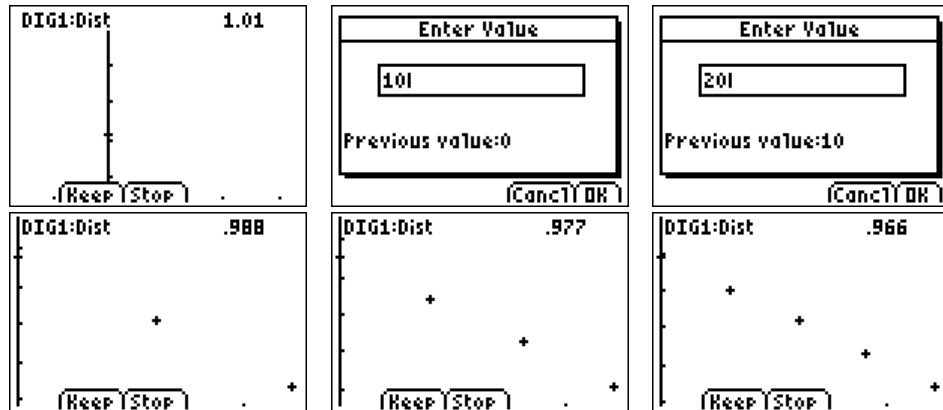
- Hang de veer en het schaalpje aan het statief en druk op **ZOOM** om het experiment te starten.



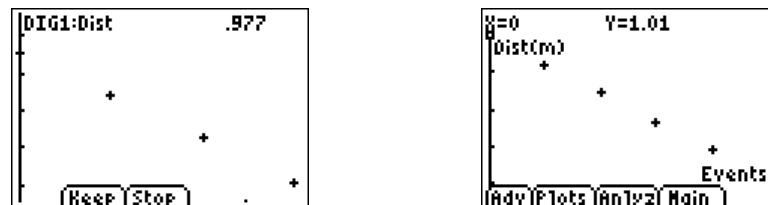
Wanneer de meetwaarde zich gestabiliseerd heeft, druk op **WINDOW** (keep) en vul dan het aantal sluitringetjes in (0).



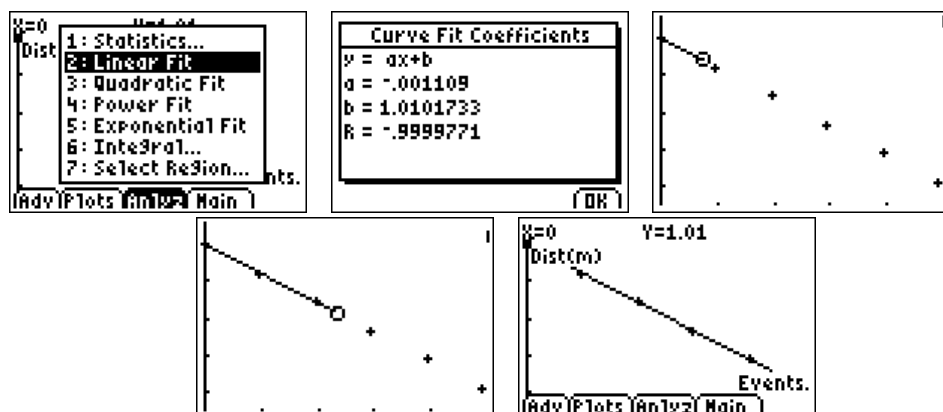
- Leg 10 sluitringetjes bij in het schaalte. Wanneer de meetwaarde stabiel is druk op **WINDOW** (keep) en vul het aantal sluitringetjes in.



- Herhaal dit een 10-tal keer (100 sluitringetjes). Na het opmeten van de waarde en het invullen van het aantal sluitringetjes druk op **ZOOM**(stop) om het experiment te stoppen. Merk op telkens er een meetpunt gekend is, wordt het meetpunt ook getekend.



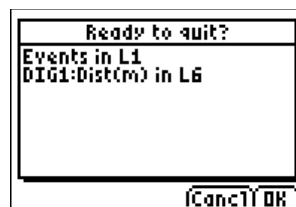
- Na het stopzetten van het opmeten kunnen we onmiddellijk binnen EASYDATA de vergelijking van de best passende rechte laten berekenen. Kies daarvoor ANALYSE waarna we 1: Linear fit selecteren.



Nu heb je onmiddellijk een lineair verband dat ontstaan is uit een praktische situatie. Die laatste zou je kunnen weglaten en de leerlingen de opdracht geven om te onderzoeken welk verband er bestaat tussen de uitrekking van de veer en het aantal sluitringetjes die in het schaalpje liggen.

Wanneer we van alle gemeten afstand de beginafstand aftrekken (schaaltje zonder sluitringetjes) kunnen we de transformatie bespreken die hierbij hoort om van de oorspronkelijke grafiek naar de nieuwe grafiek te komen. Om de richtingscoëfficiënt en de betekenis van die richtingscoëfficiënt kan door de leerlingen onderzocht en gecontroleerd worden.

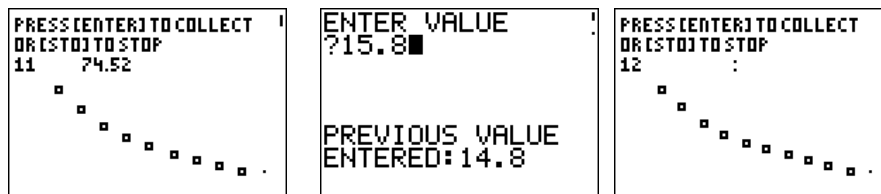
Na het afsluiten van de analyse en bij het verlaten van de applicatie EASYDATA krijgen we nog de boodschap in welke lijsten de meetresultaten worden opgeslagen.



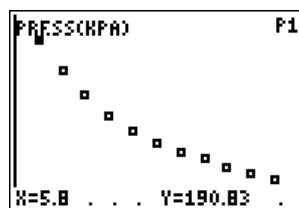
Opmerking: Let er op dat het elasticiteitsgebied van de veer niet overschreden wordt. Zorg ervoor dat er een gepaste maximale massa aan de veer opgehangen wordt. Indien dit niet het geval is, geldt de wet van Hooke niet meer.



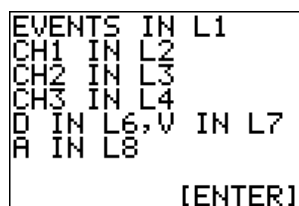
- Het uitvoeren van het experiment
  - Druk 2: START om het opmeten te starten.
  - Schuif de zuiger naar 5ml. Hou de zuiger in de positie en wacht tot de aflezing van het volume zich stabiliseert. Om de waarde te aanvaarden en op te sparen druk op **ENTER**
  - Er wordt gevraagd naar de waarde van het volume. Voer de waarde in en vergeet niet rekening te houden met de aan te brengen correctie (zie hoger).
  - Herhaal de volgende stappen voor de waarden 7 ml, 10 ml, 12 ml, 15 ml, 17 ml, 20 ml.



- Om het meten te stoppen drukken we op **STO▶**. Onmiddellijk wordt een grafiek waarin de luchtdruk t.o.v. het volume uitgezet is, weergegeven.

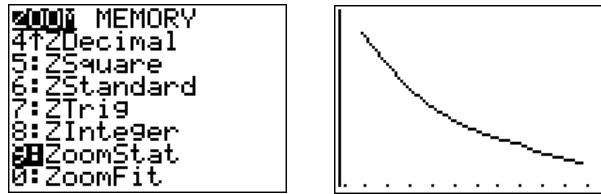


- Druk op ENTER om terug in het basisscherm te komen en druk 6: QUIT. DATAMATE heeft bij het verlaten van de applicatie weer in welke lijsten de waarden werden opgeslagen. Dit is belangrijk om achteraf verschillende grafieken te kunnen maken.



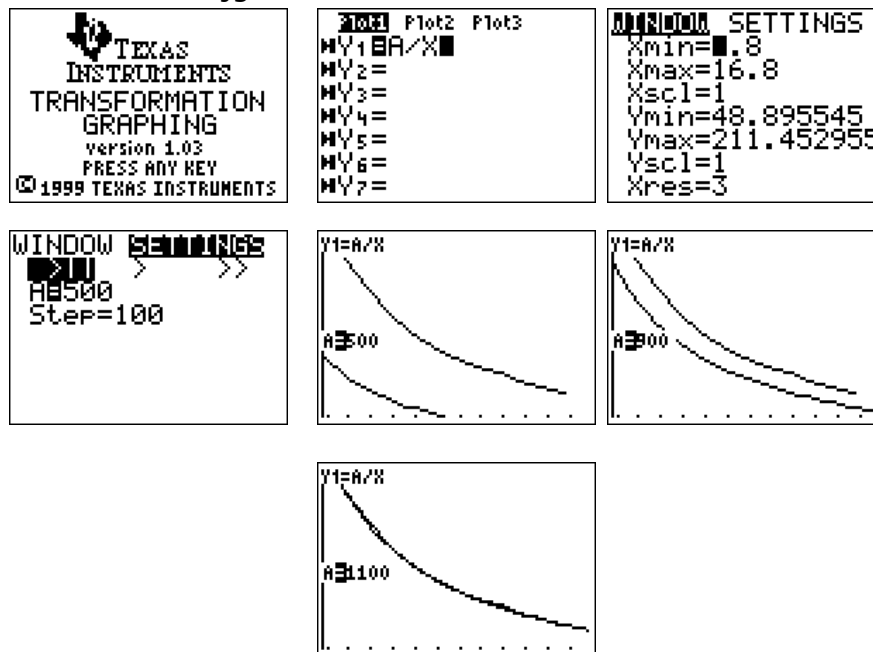
Vragen:

- Om de grafiek opnieuw op het scherm te krijgen, kies 9: ZoomStat uit het zoom-menu. Met **TRACE** kunnen we doorheen de verschillende waarden wandelen.



- Wandel doorheen de meetresultaten en noteer het volume (x) en de druk (y) (afgerond tot 0.1kPa) Wat stel je vast?
- Start de applicatie Transfrm en maak de volgende instellingen
  - Druk **y=** en vul in A/X bij Y<sub>1</sub>
  - Druk op **WINDOWS** en selecteer SETTINGS
  - Kies de eerste optie (één voor één berekening)
  - Startwaarde voor A=500 Step=100 om te beginnen.
  - Druk op **GRAPH** door **>** in te drukken gaan we over naar de volgende waarde.

We kunnen de waarden eventueel verfijnen om een nog beter resultaat te krijgen.



- We laten de rekenmachine een model opstellen dat de meetresultaten benadert. We maken eerst een spreidingsgrafiek van de meetpunten.
  - Kies **2nd** **y=** (STATPLOT) en activeer plot. Selecteer **▢** en vul in x-list L1 en y-list L2. Druk op **ZOOM** 9:ZoomStat om de grafiek te verkrijgen.



- Kies **STAT** **CALC** A:PwrReg en vul aan met de lijsten L1, L2 en de variabele Y1

```

EDIT [2nd] [TESTS]
5: QuadReg
6: CubicReg
7: QuartReg
8: LinReg(a+bx)
9: LnReg
0: ExpReg
[PwrReg]

```

```

PwrReg L1,L2,Y1

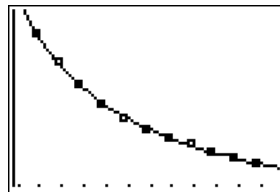
```

```

PwrReg
y=a*x^b
a=1120.098165
b=-1.005381573

```

- Druk op **ENTER** om het functievoorschrift te laten berekenen.
- Druk **ZOOM** en 9:ZoomStat om de grafiek te verkrijgen.



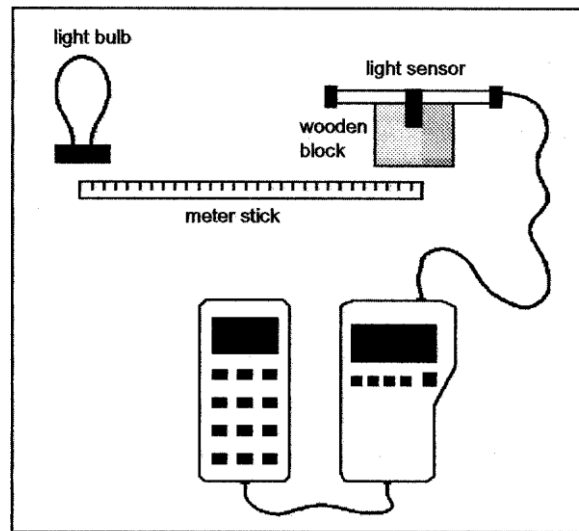
We krijgen een omgekeerd evenredig verband. Kun je nog een manier bedenken om te controleren of het gaat over een omgekeerd evenredig verband?

## 4 Experiment 3: Lichtintensiteit

### Inleiding:

Uit het dagelijkse leven weten we dat de lichtintensiteit afneemt naarmate we verder van de lichtbron verwijderd zijn. In de fysica toont men aan dat de lichtintensiteit omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de lichtbron:

$$I \sim \frac{1}{r^2}$$

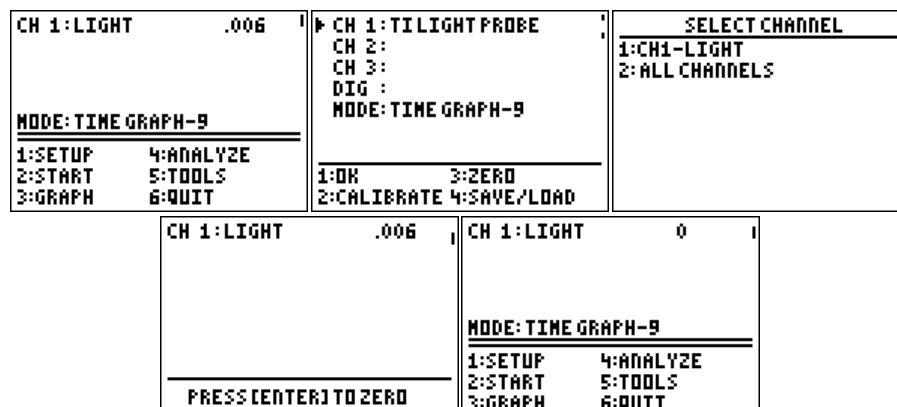


### Benodigheden:

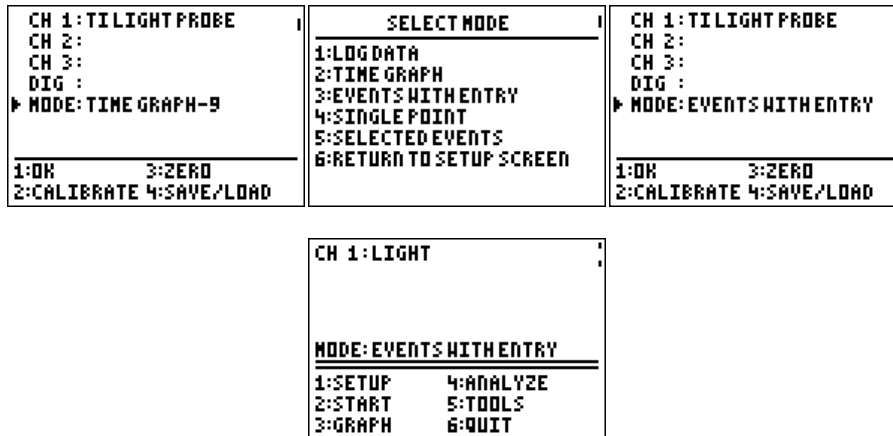
- Een grafische rekenmachine met DATAMATE, de CBL2 met lichtsonde.
- Een lichtbron (een gloeilamp).
- Een meetlat ( $\pm 1$  m).
- Een koker waarin de lichtsensoren zal ingebracht worden om de metingen uit te voeren. Twee statiefjes om er de koker op te leggen zodat de lichtsensoren ongeveer gepositioneerd is op het centrum van de gloeilamp.
- Een lokaal dat kan verduisterd worden.

### Experiment:

- Sluit de CBL2 met de lichtsensoren aan op de rekenmachine en start de applicatie DATAMATE op de rekenmachine. Stel daarbij de lichtsensoren op nul vooraleer de lamp brandt. Op die manier kan de lichtstoring in de achtergrond geneutraliseerd worden.



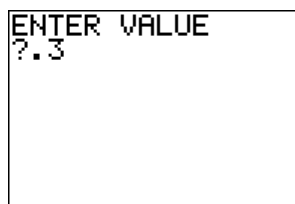
- We maken de juiste instellingen voor het uitvoeren van het experiment:
  - Druk 1: SETUP en selecteer mode: time-graph.
  - Druk 2: CHANGE SETTINGS. Kies voor 3:EVENTS WITH ENTRY.
  - Bevestig en keer terug naar het basisscherm.



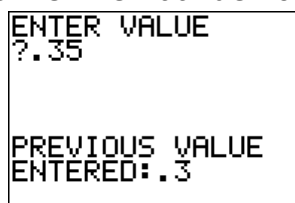
- Plaats de lichtsonde ongeveer op een 30 cm van het centrum van de lamp. Eventueel moet de beginafstand groter genomen worden om sneller een daling van de intensiteit te bemerken.
- Start het opmeten door 2: START in te drukken.
- Er verschijnt een waarde op het scherm. Wanneer de waarde zich gestabiliseerd heeft, drukken we op **ENTER**.



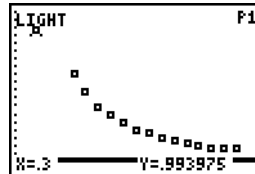
- Er wordt gevraagd om een waarde in te voeren. Voer de waarde van de afstand van de lichtsensor tot de lamp in en bevestig door **ENTER** in te drukken.



- Verplaats de lichtsensor 5 cm en herhaal de voorgaande twee stappen.



- Herhaal deze acties tot er 10 tot 15 meetpunten gedefinieerd zijn. Merk op dat telkens er een meetpunt gedefinieerd is dit meetpunt grafisch wordt weergegeven in het scherm. Zo kun je beter het verloop van het opmeten volgen.
- Wanneer er voldoende meetpunten opgemeten zijn, sluiten we het experiment af door op **STO▶** te drukken wanneer een nieuwe meting van de lichtintensiteit verschijnt op het scherm.
- Na het afsluiten van het experiment wordt de grafiek gemaakt waarin alle meetpunten worden weergegeven.

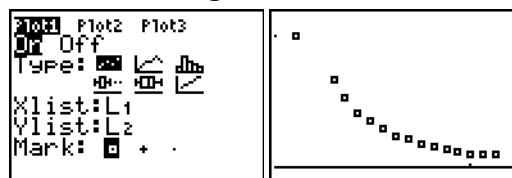


- Sluit DATAMATE af door op het basisscherm 6:QUIT te kiezen.

```
EVENTS IN L1
CH1 IN L2
CH2 IN L3
CH3 IN L4
D IN L6,V IN L7
A IN L8
[ENTER]
```

Analyse:

- Druk **ZOOM** 9:ZoomStat om de grafiek buiten DATAMATE te bekijken.



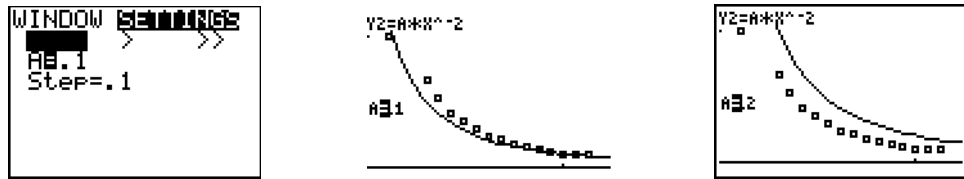
Wat kun je besluiten uit de grafische voorstelling van de lichtintensiteit t.o.v. de afstand? Is dit in overeenstemming met wat de fysica hierover zegt?

- Volgens de fysica is de lichtintensiteit omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lichtbron. Ga na met de applicatie Transfrm en een parameter A of de data voldoet aan de gestelde wet (zie inleiding van de proef). Probeer de waarde van A zo goed mogelijk te benaderen.
  - Voer het functievoorschrift met parameter A in bij **Y=**

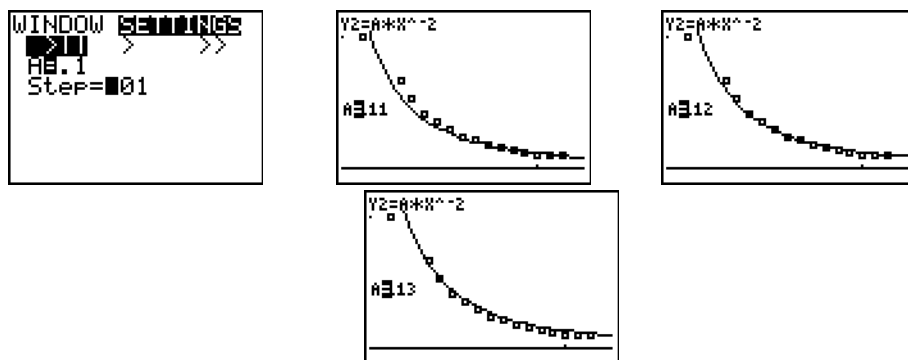
```
Y1=
Y2=A*X^-2
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

- Start de applicatie Transfrm op.

- o Druk **WINDOWS** en selecteer de **SETTINGS**. Kies de mogelijkheid >|. Stel de beginwaarde voor de parameter A in en de stapgrootte waarmee de waarde moet veranderen.



- o Druk **GRAPH** door op **ENTER** te drukken wordt telkens de grafiek van de functie getekend voor een andere parameterwaarde. Het is mogelijk dat de waarden van de parameter en stapgrootte moeten worden bijgesteld om een betere benadering van de grafiek te bekomen.



- Probeer aan de hand van de bovenstaande manier een zo goed mogelijke benadering voor de parameter te bepalen.
- De rekenmachine is in staat om machtsregressie toe te passen op data. Het model dat hierbij hoort heeft als voorschrift  $y = a \cdot x^b$ . We merken dat er nu twee parameters bepaald moeten worden. Naast de evenredigheidsconstante moet ook de exponent worden bepaald. We laten de rekenmachine deze regressie uitvoeren.
  - o Druk **STAT** en selecteer **CALC**.
  - o Kies **A: PwrReg** en vul aan met de lijsten **L1**, **L2** en de y-variabele **Y2** en druk op **ENTER**.
- De rekenmachine berekent de parameterwaarden en spaart het voorschrift op in de variabele **Y2** om het eventueel later grafisch weer te geven.



Liggen de resultaten in de lijn van de verwachtingen?

Uitdaging:

Indien je niet zou beschikken over de applicatie Transfrm en de mogelijkheid om machtregressie toe te passen, kun je dan een manier bedenken om dit verband te controleren en de waarde van de evenredigheidsconstante te berekenen?

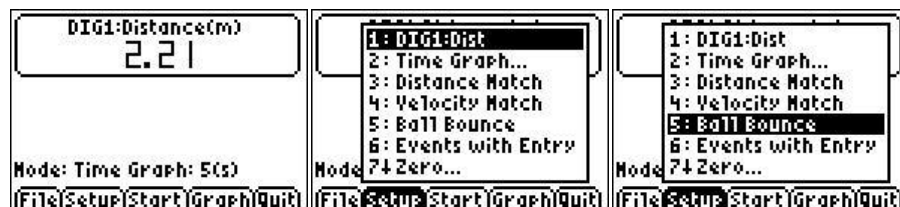
## 5 Experiment 4: Botsende bal

### Benodigheden:

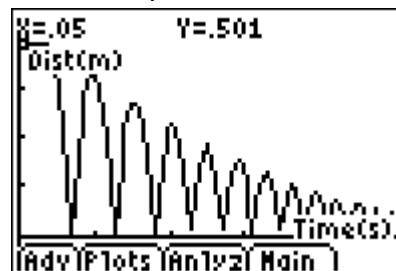
- Grafische rekenmachine met de applicatie EASYDATA.
- CBR aangesloten op de rekenmachine.
- Een bal voldoende glad en groot en veerkrachtig.

### Experiment:

- Instellingen voor het experiment
  - Koppel de CBR aan de rekenmachine en de applicatie EASYDATA automatisch. Indien dit niet het geval is, druk **APPS** en selecteer EASYDATA.



- Kies SETUP.
  - 5: Ball Bounce
- Hou de bal ongeveer een veertig cm onder de CBR en laat de bal los terwijl op START wordt gedrukt. Na het meten verschijnt automatisch de grafiek van het experiment op het scherm.



Tip: Laat de bal ook niet van een te grote hoogte vallen. Dit vermindert de kans dat de bal uit de detectiekegel van de CBR botst.

### Vragen:

- Wat valt er op aan het verloop van de grafiek? Hoeveel keer heeft de bal gebotst?
- Wat stelt één boog voor? Met wat komt die boog overeen in het experiment?
- Wat is de hoogte van de bal bij de tweede botsing?
- Wordt hier de werkelijke situatie weergegeven of is het een benadering van de beweging van de botsende bal?

We verlaten de applicatie EASYDATA. Bij het verlaten heeft het programma aan in welke lijsten de verschillende gemeten grootheden opgeslagen zitten. Zo staan de verschillende tijdswaarden in lijst L1, de waarden van de afstand worden dan opgespaard in de lijst L6, de waarden van de snelheden in lijst L7 en de resultaten voor de versnelling in de lijst L8.

Voor het vervolg is het interessant die lijsten nog eens op te sparen in lijsten met een andere naam. Kies hierbij namen die weergeven wat de inhoud van de lijsten is. We zullen een aantal handelingen uitvoeren waardoor een deel van de gegevens zullen verloren gaan. Vandaar het volgende voorstel:

- L1 (tijd) in lijst met naam T
- L6 (afstand) in lijst met naam S
- L7 (snelheid) in lijst met naam V
- L8 (versnelling) in lijst met naam A.

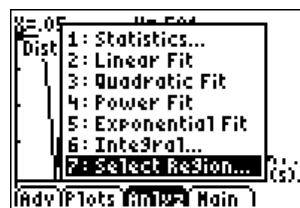
```

L1→LT          C.0499712 .0999...
C.0499712 .0999...
L6→LS          C.50058 .50058 ...
C.50058 .50058 ...
L7→LV          C0 -.00137078 ...
C0 -.00137078 ...
L8→LA          C0 -.054863 -.1...
C0 -.054863 -.1...
    
```

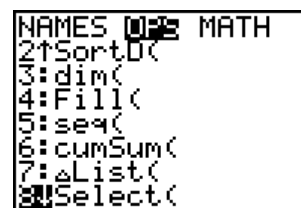
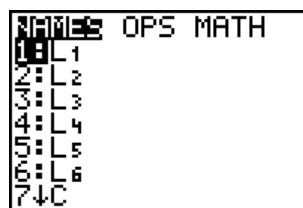
Opgelet: Om conflicten met namen van andere variabelen te vermijden, plaats je best het lijstteken (kleine hoofdletter L) voor de naam van de lijst.

We willen één mooie boog uit de reeks selecteren.

We kunnen dit doen rechtstreeks in de applicatie EASYDATA



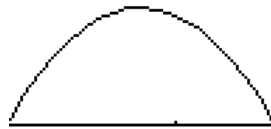
Wanneer we dit buiten de applicatie om willen doen kunnen we gebruik maken van de instructie SELECT uit de **2nd** **STAT** (LIST).





Eerst moet de grafiek waarin de afstand versus tijd wordt uitgezet, opnieuw op de rekenmachine getoond worden.

- Druk  $\boxed{2nd} \boxed{Y=}$  (Stat Plot)
- Selecteer Plot1 en maak een spreidingsgrafiek met als x-waarden de lijst L1 en als y-waarden de lijst L6 en vierkantje als teken.
- Druk op  $\boxed{ZOOM}$  en selecteer 9:ZoomStat.
- Druk  $\boxed{2nd} \boxed{STAT}$ , selecteer OPS en druk 8:Select(. Vul aan met de lijstnamen L1 en L6 en druk op  $\boxed{ENTER}$ . Je keert nu automatisch terug naar de grafiek waar de linkergrens en de rechtergrens van het te selecteren gebied moet aangeduid worden. De grafiek wordt hertekend voor het geselecteerde gebied. Let wel de andere, niet geselecteerde, meetwaarden zijn verloren gegaan tijdens deze operatie.
- Pas daarna de vensterinstellingen zo aan dat de meetpunten mooi verspreid worden over het volledige scherm.



- Schakel  $\boxed{TRACE}$  in. Nu kunnen we navigeren tussen de verschillende meetpunten.
- Probeer nu met de cursor de positie van de top (van de parabool, waarom?) te benaderen. Hierbij kan nagedacht worden over de volgende vragen:
  - Zal de top van de parabool altijd een punt zijn dat zal gedetecteerd worden door de CBR? Waarom of waarom niet?
  - Hoe kan de symmetrieas van de parabool gebruikt worden om de plaats van de top in te schatten?
  - Wat is de richting van de symmetrieas? Hoe kunnen we de symmetrieas bepalen?
- Teken de symmetrieas door het punt dat gekozen werd als top. Druk  $\boxed{2nd} \boxed{PRGM}$  (Draw) en kies voor 4: Vertical. De rekenmachine keert onmiddellijk terug naar het grafische venster en er wordt een verticale rechte getekend op de plaats van de cursor. Met de pijltjestoetsen kan de positie van de verticale rechte aangepast worden. Wanneer de juiste positie van de rechte vastligt, kan dit bevestigd worden door  $\boxed{ENTER}$  in te drukken.
- Bepaal de coördinaten van de vermoedelijke top.
- Start de applicatie Transfrm op.
- Daar we werken met de coördinaten van de top en de vergelijking van de symmetrieas, is de gebruikelijke vorm voor het voorschrift van een tweedegraadsfunctie  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  niet zo geschikt. Er bestaat een alternatieve vorm die veel gemakkelijker kan gebruikt worden:

$f(x) = A(x - B)^2 + C$ , waarbij  $x = B$  de vergelijking van de symmetrieas voorstelt en  $(B, C)$  de coördinaten van de top van de parabool.

Voer daarom als functievoorschrift de laatste vorm in met als drie parameters A, B, C. Aan de hand van waarden van de parameters A, B en C zullen we proberen de vorm van de parabool te benaderen.

- Maak eerst de volgende instellingen:
  - Druk WINDOW en selecteer SETTINGS
  - Selecteer >||.
  - Vul de waarden voor B en C in met de waarden die we gevonden hebben voor de top van de parabool.
  - We moeten enkel nog een waarde voor de parameter A invullen. De exacte waarde kennen we niet. Vandaar kiezen we een startwaarde en een stapgrootte. We kunnen dan achtereenvolgens de parabolen laten verschijnen voor de verschillende parameterwaarden van A, vertrekkend van de startwaarde en telkens toegenomen met de stapgrootte. Om de benadering van de kromme te verbeteren, kan de stapgrootte van de verandering aangepast worden.

Vragen:

- Is het een dal- of een bergparabool?
  - Welk teken moet de parameterwaarde dan hebben?
- 
- Zorg dat de parameter geselecteerd is. Dit kun je merken aan het gelijkheidsteken. Hier gelden dezelfde regels als bij het selecteren van een functie in Y=.
  - Aan de vensterinstellingen zelf wordt niets gewijzigd.
  - Keur terug naar de grafiek van de parabool. De eerste benaderende parabool van de reeks staat al getekend.
  - Door de pijltjestoetsen te gebruiken, kunnen we verschillende benaderingen van de parabool bekijken. Wanneer we twee waarden van de parameter A gevonden hebben waarbij de gegeven parabool goed benaderd wordt, kunnen we de stapgrootte waarmee de parameter A verandert, verkleinen. Eventueel moet ook de beginwaarde aangepast worden.
  - Herhaal bovenstaande procedure totdat de benadering bevredigend genoeg is.  
Welke waarde voor de parameter A is verkregen? Heeft deze parameterwaarde een speciale betekenis?

Nuttige tips:

- Gebruik ballen die een voldoende glad en groot oppervlak hebben en naadloos zijn. Dit bevordert het opmeten en het regelmatig botsen van de bal.
- Hou de hoogte van de botsing beperkt tot maximaal 1 m. Vergeet niet dat de CBR ongeveer 40 cm hoger moet worden gehouden. Vandaar kan de proef het best door twee personen uitgevoerd worden.
- Het uitgezonden signaal van de CBR is een ultrasoon geluidssignaal en kegelvormig. De waarneming van de CBR wordt vastgezet op het object dat de CBR het eerst ontdekt in die kegel.
- Zorg ervoor dat de ondergrond voldoende zuiver (glad) is, dit om het regelmatig terugkaatsen te bevorderen.
- In plaats van de Transfrm applicatie te gebruiken zou ook gebruik gemaakt kunnen worden van de kwadratische regressie om de verschillende parameters te bepalen. Regressie kan achteraf gebruikt worden om de bekomen waarden te controleren.
- Het experiment van de botsende bal kan ook gebruikt worden in het kader van de studie over de exponentiële functies. Daarbij worden dan enkel de waarden van de toppen van de verschillende parabolen in rekening gebracht.

Aan de hand van deze gegevens wordt dan een grafische voorstelling gemaakt. Men kan dan op zoek gaan naar het passende voorschrift van een exponentiële functie.

## 6 Experiment 5: De rollende bal

### Benodigdheden:

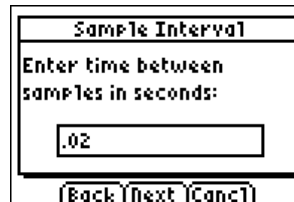
- Een plank van voldoende lengte.
- Eventueel 2 roedes op de plank bevestigd waarop de bal gelegd wordt. Zo kan de bal in een rechte lijn van de plank rollen zonder langs de zijkanten van de plank te vallen.
- Een plastic bal voldoende groot en glad (eenvoetbal bijvoorbeeld).
- Een grafische rekenmachine voorzien van EASYDATA of DATAMATE en een CBR.
- Een statief om de plank aan de ene kant op te leggen. Zorg er voor dat de hoogte van de plank kan veranderd worden.
- Een geodriehoek of gradenboog.

### Opstelling:

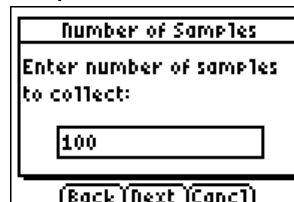
- Zorg dat het statief zo geplaatst wordt dat de plank eraan bevestigd kan worden waarbij de hoogte van de plank veranderd kan worden.
- Monteer ook de CBR op het statief. Zorg ervoor dat de geluidskegel uitgezonden door de CBR boven de plank blijft en dat ook de bal in de kegel gevangen blijft over het ganse gevolgde traject.

### Experiment:

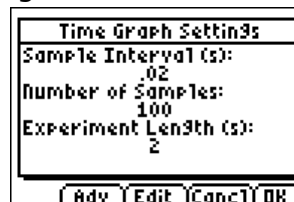
- Het is de bedoeling de bal van de plank te laten afrollen bij verschillende hellingsgraden en de invloed te bestuderen op de vergelijkingen van de modellen. De uitvoering van het experiment bij een bepaalde hoek wordt beschreven. Voor de andere hellingsgraden verloopt het experiment volkomen analoog.
- Maak volgende instellingen na het aansluiten van de CBR op de rekenmachine en het starten van de applicatie EASYDATA of DATAMATE. Automatisch wordt het soort sensor door de applicaties gedetecteerd.
  - Druk SETUP
  - Kies 2: Time Graph
  - Druk EditVoer het tijdsinterval in tussen twee metingen bijvoorbeeld 0,02 s. Dit betekent dat het toestel per seconde 50 metingen zal uitvoeren. Hou rekening met de beperking van het geheugen van de rekenmachine. Druk CLEAR om de reeds ingevulde waarde te wissen.



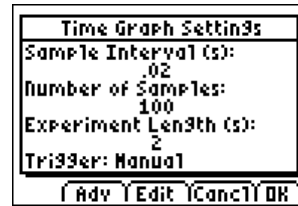
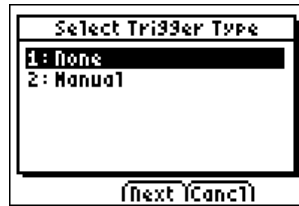
- o Druk NEXT na het invullen van de waarde. Voer dan het totaal aantal metingen in die je wilt uitvoeren gedurende het experiment. Zorg dat er voldoende uitgevoerd worden zodat de CBR het ganze traject van de bal volgt. Meet vooraf de tijd die de bal nodig heeft om het traject af te leggen. Zo kan het aantal metingen bepaald worden.



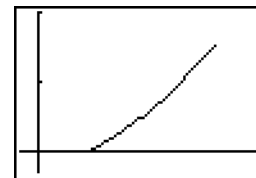
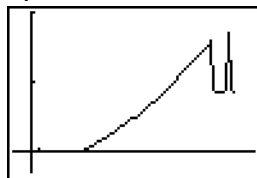
- o Druk NEXT dan wordt automatisch de duur van het experiment berekend en alle instellingen worden in een scherm aangegeven.



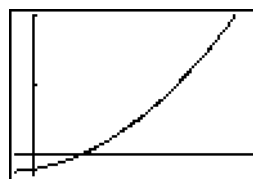
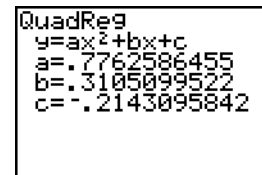
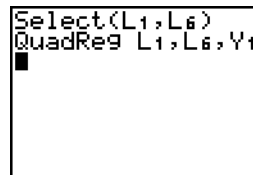
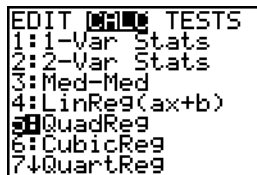
- Zorg dat de bal ongeveer 40 cm van de CBR gepositioneerd is bij het starten van de metingen. Indien dit niet het geval is, bestaat het gevaar erin dat de bal door de CBR niet gedetecteerd wordt. Het kan handig zijn om de beginpositie van de bal te markeren zodat bij herhaling van het experiment de bal precies op dezelfde plaats start. Op die manier is het dan ook aangewezen de beginpositie van de bal als nulpositie aan te geven. Dit kan bij de SETUP van de CBR. In het menu SETUP staat de optie 7: Zero, daarmee kan de beginpositie op nul ingesteld worden.
- Druk op START en laat de bal rollen. Eventueel kan gebruik gemaakt worden van triggering. Dit betekent dat de sensor op zulke wijze wordt ingesteld dat hij pas gaat beginnen te meten wanneer aan bepaalde condities worden voldaan. We moeten dan in het meetproces niet meer tussenkomen. Om de triggeringmode te activeren druk op **WINDOW** (Adv) in Time Graph Settings.



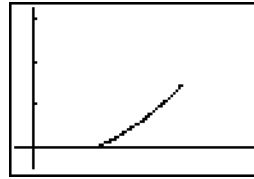
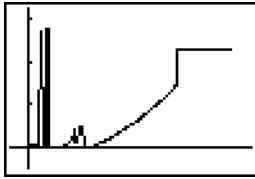
- Wanneer de metingen afgelopen zijn, proberen we enkel nog het interessante stuk van de grafiek te behouden. Wanneer de grafiek op het scherm staat, drukken we op ANALYSE en kiezen voor 7: Select Region. Er verschijnt een waarschuwing dat bij het gebruik van deze mogelijkheid er verlies van gegevens (metingen) optreedt. Vandaar is het verstandig om eerst het experiment (de lijsten met de meetwaarden) te bewaren. Ga terug naar het hoofdscherm (basisscherm) van EASYDATA en druk op FILE en 3: Save as en voer een betekenisvolle naam in. Op die manier kan de oorspronkelijke grafiek opnieuw gegenereerd worden na het selecteren van een bepaald stuk van de grafiek.



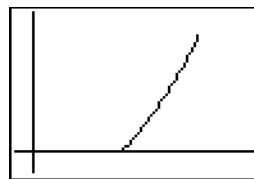
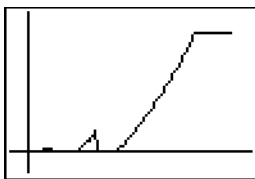
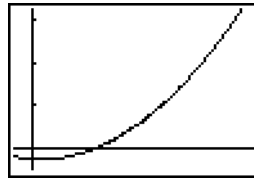
- Meet de hoek op die de plank met de tafel (horizontaal ondersteeld) maakt.
- Pas kwadratische regressie toe op de geselecteerde zone van de grafiek. Noteer naast de hoekgrootte de coëfficiënt van de tweedegraadsterm uit de kwadratische regressie.



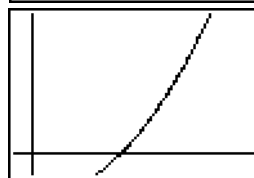
- Herhaal dit voor verschillende hoeken.
- Hieronder vind je een aantal grafieken bekomen bij verschillende hoeken en ook de coëfficiënten van de kwadratische regressie.



```
QuadReg
y=ax2+bx+c
a=.2506574521
b=-.0718373143
c=-.2471769266
```



```
QuadReg
y=ax2+bx+c
a=.4614985898
b=-.0880339988
c=-.2824571744
```



Vragen die hierbij kunnen gesteld worden:

- Wat is de startpositie van het voorwerp? Deze vraag kan alleen gesteld worden wanneer de beginpositie niet op nul wordt gesteld.
- Wat is de eindpositie van het voorwerp? Deze vraag kan alleen gesteld worden wanneer de beginpositie niet op nul wordt gesteld.
- Welke afstand heeft de bal afgelegd voor hij de plank verlaat?
- Welke functie beschrijft de beweging van de bal?
- Waarom heeft de grafiek van de afstand t.o.v. de tijd deze vorm?
- Wat is de fysische betekenis van elk van coëfficiënten die door kwadratische regressie wordt berekend?
- Kun je de invloed van de grootte van de hoek op de coëfficiënt van de tweedegraadsterm verklaren?

## 7 Experiment 6: Lichtintensiteit bij een TL-lamp

### Benodigdheden:

- Een grafische rekenmachine voorzien van de applicatie DATAMATE of EASYDATA.
- Een CBL2 met een lichtsensor.
- Een verlichtingselement met een TL-lamp.

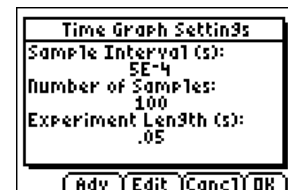
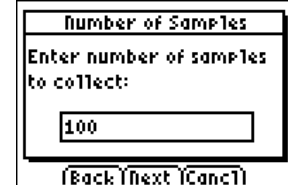
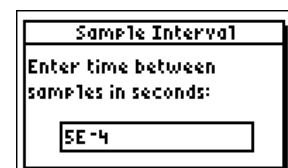
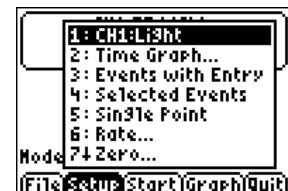


### Experiment:

- Koppel de lichtsensor aan op de CBL2 en de CBL2 aan de rekenmachine.
- Start EASYDATA of DATEMATE op. De applicatie herkent meteen het soort sensor dat aangesloten is.

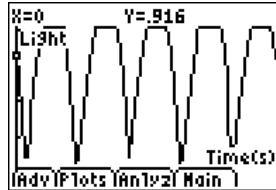


- Maak de volgende instellingen (hier voor EASYDATA gegeven maar deze kunnen ook gebruikt worden bij DATAMATE):
  - Druk SETUP.
  - Selecteer 2: Time Graph
  - Druk EDIT.
  - Voer het tijdsinterval in tussen twee metingen. Neem hiervoor 0,0005.
  - Druk NEXT.
  - Voer het aantal metingen in die moeten uitgevoerd worden. Neem hier 100.
  - Druk NEXT. Er wordt een overzicht gegeven van de verschillende gemaakte instellingen. Eventueel kunnen hieraan nog veranderingen aangebracht worden zoals bij experiment 5 beschreven wordt. Zijn de gemaakte instellingen in orde druk dan OK om deze te bevestigen.
  - Je komt weer in het basisscherf terecht waarin wordt weergegeven dat er een tijdsgrafiek gemaakt wordt gedurende 0,5 s.





- Breng de lichtsensor zo dicht mogelijk bij een TL-lamp en druk START. Er wordt een waarschuwingsboodschap gegeven die zegt dat de gegevens van de vorige meting zullen worden overschreven. Druk OK en de metingen worden gestart. Nadat alle metingen gemaakt zijn, wordt dan automatisch de grafiek op het scherm afgebeeld.



### Vragen:

- Wat is er bijzonder aan de vorm van de grafiek?
- Na hoeveel tijd wordt een bepaald patroon herhaald?
- Wat is de minimale en de maximale waarde van de lichtintensiteit?
- Maak een schets van deze grafiek op papier.
- Wat is de periode? Wat is de frequentie?
- Wat zijn de verschillen met de grafiek van een sinus- of cosinusfunctie? Of zijn er geen verschillen.

### Verder analyse:

Indien je weet dat de frequentie van de wisselspanning die door het elektriciteitsnet geleverd wordt 50 Hz bedraagt, bestaat er dan een verband tussen deze frequentie en de frequentie die gevonden werd uit de metingen? Kun je dan een verklaring vinden voor de gevonden frequentie van de lichtintensiteit?

*(Hint: bij wisselspanning verandert de polariteit (positief-negatief) periodisch.)*

## 8 Experiment 7: Daar zit muziek in

### Benodigdheden:

- Een grafische rekenmachine waarop DATAMATE beschikbaar is.
- Een CBL2 met als aangesloten sensor een microfoon.
- Een aantal stemvorken met passend hamertje.
- Eventueel een aantal muziekinstrumenten of een elektronisch keyboard.



### Experiment:

- Sluit de CBL2 aan op de grafische rekenmachine en start de applicatie DATAMATE.
- Sluit vervolgens de microfoon aan op de CBL2 via kanaal CH1. Er verschijnt een boodschap op het scherm van de rekenmachine "Checking Sensors". Na een poosje verschijnt dan "microphone" op het scherm. Is dit niet het geval dan zullen we handmatig de gewenste instellingen moeten maken.
  - Druk 1: Setup.
  - Kies CH1 en druk **ENTER**. Dan wordt een eerste scherm van sensoren weergegeven. Druk 7: More indien de sensor er nog niet bijstaat.
  - Na een paar vensters van sensoren doorlopen te hebben, vinden we de microfoon. Druk 4: Microphone.
  - Druk 1: CBL Microphone. Dit zorgt voor de juiste instellingen voor de CBL2 om de sensor te herkennen wanneer die aangesloten is op de ingang CH1.
  - Druk 1: Ok om de instellingen af te sluiten en te beginnen met de metingen. We krijgen opnieuw het basisscherm van DATAMATE te zien.

```

CH 1:
CH 2:
CH 3:
DIG :
MODE:TIME GRAPH-20

1:OK      3:ZERO
2:CALIBRATE 4:SAVE/LOAD
    
```

```

SELECT SENSOR
1:TEMPERATURE
2:PH
3:CONDUCTIVITY
4:PRESSURE
5:FORCE
6:HEART RATE
7:MORE
8:RETURN TO SETUP SCREEN
    
```

```

SELECT SENSOR
1:ACCELEROMETER
2:COLORIMETER
3:CO2 GAS
4:MICROPHONE
5:LIGHT
6:D.OXYGEN(MG/L)
7:MORE
8:RETURN TO SETUP SCREEN
    
```

```

MICROPHONE
1:CBL MICROPHONE
2:ULI MICROPHONE
3:MPLI MICROPHONE
    
```

```

SETTINGUP CHANNEL...
    
```

```

CH 1: CBL MICROPHONE
CH 2:
CH 3:
DIG :
MODE:TIME GRAPH-.02

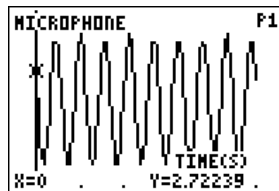
1:OK      3:ZERO
2:CALIBRATE 4:SAVE/LOAD
    
```

Opmerkingen:

Eventueel kunnen we de tijdsduur van het experiment verlengen door het aantal metingen te vergroten. Zorg ervoor dat je niets verandert aan het tijdsinterval tussen twee metingen. Dit kan de representativiteit van de grafiek beïnvloeden.

Daar het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende metingen standaard ingesteld staat op  $5 \cdot 10^{-4}$  s, moeten we rekening houden met de beperktheid van het geheugen van de rekenmachine wanneer we de tijdsduur van het experiment willen veranderen.

- Sla de stemvork aan en druk daarbij op 2: Start om het meten te laten starten. Wanneer het opmeten beëindigd is, verschijnt automatisch de grafiek van de metingen.

Vragen:

- Wat valt er op aan de vorm van de grafiek?
- Hoeveel cycli zie je op het scherm afgebeeld?
- Bepaal de tijdsduur van één enkele cyclus.
- Bepaal het verband tussen de tijdsduur van één cyclus en het aantal cycli per tijdseenheid.
- Wat is het verschil tussen de vorm van de grafiek van het geluid verkregen door het aanslaan van een stemvork en de vorm van de grafiek van het geluid door het indrukken van een toets van het keyboard? Let erop dat dezelfde toonhoogte aangeslagen wordt.
- Wat gebeurt er met de periode en de frequentie wanneer we de grafiek van het geluid van twee tonen die een octaaf uit elkaar liggen vergelijken?
- Wat verandert er aan de vorm van de grafiek van het geluid als we verschillende toetsen aanslaan op hetzelfde keyboard?
- Wat verandert er aan de vorm van de grafiek van het geluid als we verschillende instrumenten kiezen, maar wel telkens dezelfde muzieknoot (toonhoogte) spelen?
- Wat verandert er aan de vorm van de grafiek van het geluid als we het volume van het keyboard veranderen terwijl we de toets en het instrument behouden?

Variant:

Indien je beschikt over een functiegenerator, dan is het mogelijk om nog andere vormen van periodieke functies te verkrijgen. Daarbij heb je dan niet meer de microfoon nodig maar de spanningssensor.

Sluit de spanningssensor aan op de uitgang CH1 van de CBL2 en ook aan de outputklemmen van de functiegenerator (eventueel zijn daar speciale kabels voor nodig).

Daarbij zijn verschillende instellingen mogelijk:

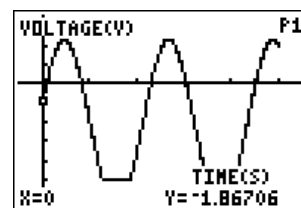
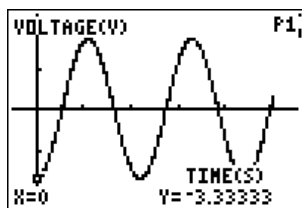
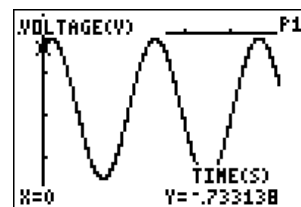
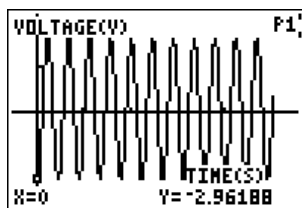


- verschillende vormen van signalen: sinus, driehoek, blok, zaagtand,...
- verschillende frequenties
- verschillende geluidsniveaus
- eventueel kan een offset meegegeven worden waardoor de functie niet meer rond de tijdsas kronkelt.

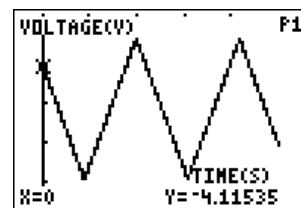
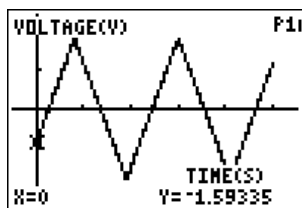
Op die manier wordt het geluidssignaal rechtstreeks doorgegeven aan het meetapparaat, waardoor er geen storend achtergrondlawaai wordt mee geregistreerd.

Hieronder een paar voorbeelden:

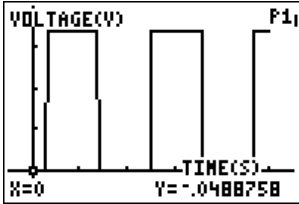
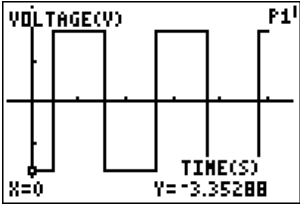
- een sinusgolf zonder en met offset:



- een driehoeksignaal zonder en met offset:



- een blokgolf zonder en met offset:



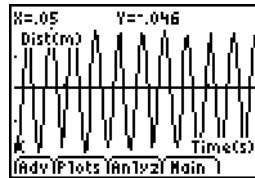
## 9 Experiment 8a: Massa aan een veer

### Benodigdheden:

- Een grafische rekenmachine met applicatie EASYDATA.
- Een CBR.
- Een statief.
- Een veer met massa's. Zorg ervoor dat de veer niet te strak is t.o.v. de massa. Anders wordt het tellen bemoeilijkt.

### Experiment:

- Leg de CBR op de grond (of tafel) met de detectiezone naar boven en sluit die aan op de grafische rekenmachine.
- Plaats het statief waaraan de veer met de massa bevestigd is, aan de rand van de tafel. Zorg eventueel voor een extra zware massa om op de voet van het statief te leggen waardoor die zo stabiel mogelijk wordt opgesteld.
- Zorg dat de massa na het geven van een uitwijking naar beneden, minstens 50 cm boven de CBR blijft. Dit is nodig om het detecteren van de massa door de CBR mogelijk te maken. Geef geen te grote uitwijking aan de massa zodat de massa bij het bereiken van de hoogste stand niet losschiet van de veer en op de CBR terecht komt. Dit kan de CBR beschadigen.
- Neem de volgende instellingen voor het experiment: tijdsduur 5 s en aantal metingen 250. Dit betekent dat de tijdsduur tussen twee metingen 0,02 s zal zijn.
  - Start EASYDATA op.
  - Selecteer SETUP.
  - Druk 2: Time Graph.
  - Selecteer EDIT.
  - Vul het tijdsinterval tussen twee metingen in.
  - Selecteer NEXT.
  - Vul het aantal metingen in.
  - Selecteer NEXT. Dan worden de ingevoerde waarden nog eens weergegeven.
  - Selecteer OK om de instellingen te bewaren. Het toetstel is dan klaar om te meten.
- Geef de massa een uitwijking en laat de massa los. Selecteer tezelfdertijd START.
- Wanneer de CBR klaar is met het uitvoeren van de metingen, wordt automatisch een passende grafiek weergegeven op de rekenmachine.



### Vragen:

- Wat valt er te zeggen over de grafiek horend bij het experiment?
- Wat valt er op aan de grafiek?
- Waarom slingert de grafiek niet rond de t-as?
- Wat is de afstand door de massa afgelegd in één periode?
- Wat is de hoogste stand van de massa t.o.v. de CBR?
- Wat is de hoogte van de massa wanneer die in rust is?
- Wetend dat de algemene sinusfunctie een voorschrift heeft gelijk aan  $y(t) = A \cdot \sin[B \cdot x - C] + D$ . Bepaal de waarden voor de vier parameters A, B, C en D.
- Gebruik de applicatie Transfrm om de waarden van A, B, C en D te achterhalen.
- Gebruik de mogelijkheid van sinusregressie voorzien onder **STAT** CALC om de vorm van de grafiek te benaderen. Vergelijk de verschillende coëfficiënten met de reeds berekende coëfficiënten.
- Onderzoek de betekenis van de coëfficiënten A, B, C en D door:
  - een andere massa aan de veer op te hangen en de uitwijking te behouden.
  - een andere uitwijking te geven aan de massa en de massa zelf onveranderd te laten.
  - door op een ander moment de meting te starten bij dezelfde uitwijking en dezelfde massa.
  - door het ophangpunt van de veer te veranderen zonder de initiële uitwijking van de massa en de massa te veranderen.

### Opmerking:

Wil je een sinusfunctie bekomen die toch rond de t-as schommelt, dan moet je bij het instellen van het toestel de nulstand voor de CBR aangeven.

- Selecteer Setup.
- Druk 7: Zero.
- Selecteer ZERO.

Hierdoor zal de afstand van de rustpositie van de massa tot de CBR als nul aanzien worden. Zo kan dan de gewone sinusvorm bestudeerd worden.



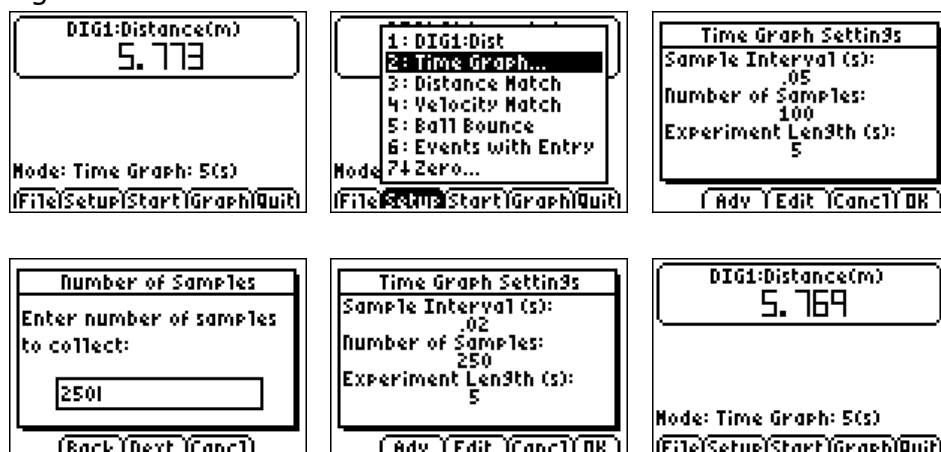
## 10 Experiment 8b: De slingerbeweging

### Benodigheden:

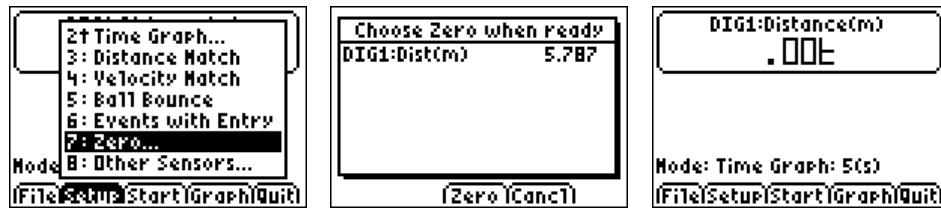
- Een grafische rekenmachine voorzien van de applicatie EASYDATA.
- Een CBR.
- Een touw met een massa (bijvoorbeeld een schietlood werkt uitstekend, ook een voetbal aan een touw opgehangen kan gebruikt worden). Zorg ervoor dat de massa minstens cilinder- of bolvormig is. Een schietlood is te verkiezen boven een voetbal omdat een schietlood aan een touw beter het concept van de wiskundige slinger benadert.
- Eventueel kan ook een photogate gebruikt worden. Daarbij heb je dan nog een CBL2 en de applicatie VST apps, te downloaden van de website van Vernier, op de grafische rekenmachine bijkomend nodig.

### Experiment:

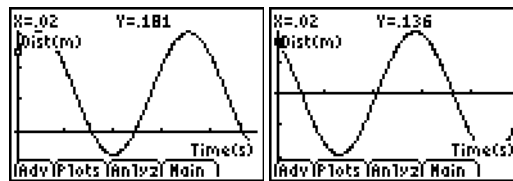
- Plaats de CBR rechtop op de grond. Hou rekening dat het signaal door de CBR uitgezonden kegelvormig is. Dus zorg dat er geen obstakel tussen de CBR en het schietlood zitten.
- Hang het schietlood aan het plafond op zodat het lood zich in de detectiezone van de CBR bevindt. Zorg daarbij dat de CBR verder genoeg verwijderd blijft van het lood want als het lood op een afstand kleiner dan 50 cm van de CBR komt, wordt het lood niet meer gedetecteerd.
- We wachten totdat de massa niet meer beweegt en maken de volgende instellingen:
  - Waarnemingen: gedurende 5 s wordt er met tussenposen van 0,02 s gemeten.



- We nemen de rustpositie van het schietlood als afstand 0. Hoe dit moet gebeuren werd in experiment 8a reeds behandeld.



- Wanneer deze instellingen gemaakt zijn, geven we het lood een uitwijking (niet te groot). Bij het loslaten van de massa selecteren we START om het opmeten te starten.
- Na het beëindigen van het meten wordt automatisch de grafiek op het scherm geplaatst.



### Vragen:

- Welk soort functie krijgen we?
- Bepaal de periode van de slingerbeweging?
- Wat is de minimale uitwijking van de slingerbeweging?
- Welke afstand heeft het lood afgelegd bij twee opeenvolgende doorgangen door de evenwichtspositie in dezelfde zin?
- Onderzoek welke factoren de grootte van de periode beïnvloeden.
- Bepaal de lengte van de slinger. Gegeven de formule  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , bepaal de waarde van de zwaartekrachtversnelling  $g$ . Is er overeenstemming met de waarde uit de fysica?
- Selecteer GRAPH en daarna PLOTS. Druk 2: Velocity versus Time. Vergelijk de grafiek van de uitwijking versus tijd en de grafiek van de snelheid versus tijd. Welke verschillen en gelijkenissen kun je ontdekken?
- Stel het functievoorschrift van een sinusfunctie op waarmee de beweging van het schietlood kan gesimuleerd worden. Vergelijk het bekomen resultaat met het resultaat dat de grafische rekenmachine je voorstelt na toepassing van sinusregressie.
- Wat valt er te zeggen over de grafiek van de verplaatsing en de grafiek van de versnelling?

Bij het gebruik van de photogate moet er voor gezorgd worden dat het lood door de opening van de photogate gaat en voor het oog van de photogate passeert zodat de lichtstraal ontbroken wordt. Met de juiste instellingen gemaakt via VST apps kan onmiddellijk de periode afgelezen worden. Dit kan een aantal herhaald worden waardoor je een verzameling van waarden voor de periode opspaat. Deze waarden kunnen dan gebruikt worden als concrete gegevensverzameling waarop een aantal statistische berekeningen kunnen uitgevoerd worden.

## 11 Experiment 9: Gedempte harmonische trilling

### Benodigdheden:

- Een grafische rekenmachine met EASYDATA (of DATAMATE).
- Een CBR (eventueel gekoppeld aan een CBL2, niet noodzakelijk).
- Een statief.
- Een veer (geen te grote veerconstante).
- Een massa (niet te zwaar maar toch ruim in volume zodat de luchtweerstand voldoende invloed kan hebben. Bijvoorbeeld een massa met een cd'tje of als dit niet genoeg afremt kan ook een blad papier tussen twee cd'tjes).

### Experiment:

Een object opgehangen aan een veer, beweegt op en neer. Die beweging kan gemodelleerd worden door een sinusfunctie (zie hoger beschreven experiment) op voorwaarde dat de invloed van de lucht verwaarloosbaar is.

Indien de wrijving voldoende groot is, zal de massa steeds minder ver uitwijken en de amplitude van de beweging zal afnemen.

- Plaats het statief zo op de tafel dat de veer en massa voldoende voorbij de tafelrand kunnen trillen. Eventueel kan de voet van het statief verzwaard worden. Dit bevordert de stabiliteit van het geheel.
- Plaats de CBR onder de massa op de grond. Zorg ervoor dat de afstand massa-CBR minstens een 70 cm is. Sluit de CBR aan op de grafische rekenmachine.
- Schakel de rekenmachine in en zorg dat de hoekmode in radialen staat. Start de applicatie EASYDATA. Maak de volgende instellingen onder SETUP:
  - Een tijdsduur van 0.05 s tussen twee metingen.
  - 200 metingen laten uitvoeren. Dit betekent dat de totale duur van het experiment 10 s bedraagt. Het kan zijn dat dit tijdsinterval moet vergroot worden om de invloed van de luchtweerstand op te merken. Dit is afhankelijk van de massa, de veer en de manier van dempen.
  - Laten we ook de rusttoestand (evenwichtsstand) als uitwijking 0 m bekijken. Dit kan door deze toestand als ZERO-waarde te kiezen. Daardoor zal de grafiek slingeren rond de x-as.
- Geef de massa een uitwijking en start het meten bij het loslaten van de massa. Na het beëindigen van de metingen verschijnt automatisch de grafiek waarin de afstand als functie van de tijd wordt weergegeven.



- Bekijk de afstandsgrafiek. Indien die aan de verwachtingen voldoet, kun je de applicatie EASYDATA verlaten. In het ander geval kunnen de metingen hernomen worden met andere instellingen. Hou rekening met de beperkingen van het geheugen als er andere waarden gekozen bij de instellingen.

## Analyse

### **Deel 1: Het modelleren van een cosinuskrumme**

We houden geen rekening met de afname van de amplitude. Dit wordt het onderwerp van het tweede deel.

De periodieke beweging kan gemodelleerd worden door  $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot x - c]$  waarbij x in s en y in m. a staat voor de maximale uitwijking.

- Bepaal a. Neem daarvoor de grootste waarde van de uitwijking.
- De kleinste tijdsduur waarbij de beweging wordt herhaald, is de periode T. Dit is de tijd tussen twee opeenvolgende maxima of minima. Met TRACE kan die waarde benaderd worden. Wanneer T gekend is dan is ook b te berekenen met de formule  $b = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ .
- De parameter c staat in voor de faseverschuiving. Daar de cosinusfunctie een maximale waarde kent wanneer het argument nul is, zal de tijd wanneer de data voor de eerste keer een maximum bereikt, dienen als schatting van de waarde c. Dit kan ook weer met TRACE bepaald worden.

### Alternatieve methode:

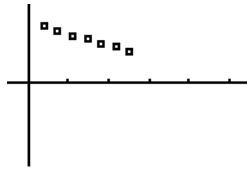
De applicatie Transfrm kan gebruikt worden om een benadering van de periodieke functie te maken. Nadeel van deze methode is de lange tijd die nodig is om een goede benadering van de functie te krijgen. Ook de betekenis van de verschillende parameters dreigt verloren te gaan bij het zoeken naar de gepaste waarde van deze parameters.

We hadden ook gebruik kunnen maken van een algemene sinusfunctie. Dan kan gebruik gemaakt worden de sinusregressie.

### **Deel 2: Het modelleren van de afname van de amplitude.**

Om het model in deel 3 te kunnen toetsen aan de grafiek, verkregen uit de uitgevoerde metingen, sparen we de waarden van de tijd en de afstand best op onder twee andere lijstnamen bijvoorbeeld T en A. Zo kunnen we steeds opnieuw de grafiek van de gemeten waarden reconstrueren.

- Stel een tabel op waarin de tijdstippen en de waarden van de verschillende maxima van de periodieke functie worden geplaatst. Met maxima bedoelen we hier alle absolute waarden van de waarden van de maximale uitwijkingen.  
Plaats de tijdstippen in een lijst L1 en de waarden van de maxima in een lijst L2. Maak een spreidingsgrafiek van de waarden uit de lijst L2 t.o.v. de waarden uit de lijst L1.



- Voer dan een exponentiële regressie uit op de lijsten L1 en L2, spaar de verkregen vergelijking op in de variabele Y1. Druk **GRAPH** om de berekende kromme in de spreidingsgrafiek te plaatsen.

### Deel 3: Uiteindelijk model van de gedempte harmonische trilling

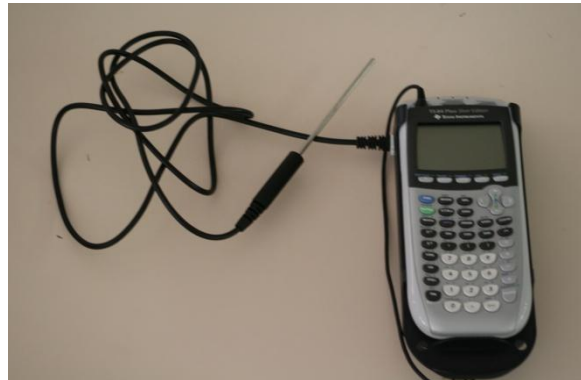
We maken nu de combinatie van beide modellen. Vermenigvuldig het voorschrift bekomen in deel 1 met het voorschrift uit deel 2. Het zo verkregen model (voorschrift) vullen we in, in de variabele Y2 in het **Y=** scherm.

We hernieuwen nu eerst de grafiek die we verkregen hebben na het opmeten van het experiment. Daarvoor maken we een spreidingsgrafiek waarbij de verschillende punten verbonden worden, met de lijst T (zie hoger) als Xlist en de lijst A als Ylist. Kies het puntje als markering voor de datapunten. Druk **ZOOM** en selecteer 9: ZoomStat om te zorgen dat de grafiek mooi binnen de venstergrenzen zou passen. Daarna kan dan ook het gevonden model in hetzelfde venster getoond worden. Tevreden over het berekende wiskundig model?

## 12 Experiment 10: Opwarming en afkoeling

### Benodigdheden:

- Een grafische rekenmachine.
- De temperatuursensor EASYTEMP met de applicatie EASYDATA of een temperatuursonde aangesloten op de CBL2 en de applicatie EASYDATA of DATAMATE.



### Experiment:

#### Deel 1: Opwarming

- We sluiten de temperatuursonde aan op de CBL2 en deze op zijn beurt aan de grafische rekenmachine. We starten het programma DATAMATE of EASYDATA. Automatisch wordt de sensor herkend.
- We meten gedurende een voldoende lange tijd en we houden het interval tussen twee metingen voldoende groot om niet in de problemen te komen met de beperkingen van het geheugen van de grafische rekenmachine. We maken de volgende instellingen via het SETUP menu en time-graph:
  - Bijvoorbeeld een tijdsduur tussen twee metingen van 0,5 s en 100 waarnemingen. Dit betekent dat de temperatuur gedurende 50 s wordt opgemeten.
- Neem de tip van de temperatuursensor in de hand en druk op START. Het opmeten wordt gestart.
- Verlaat de applicatie. De gegevens worden in verschillende lijsten opgeslagen. De tijdstippen worden in lijst L1 opgeslagen en de waarden van de temperatuur in de lijst L2.
- Maak een spreidingsgrafiek van lijst L2 versus lijst L1.
- Onderzoek de kromme met **TRACE**. Wat gebeurt er bij grote tijdswaarden?
- We merken dat de waarde van de temperatuur nog nauwelijks verandert. We spreken van een asymptotisch gedrag. Wat is de verklaring? Wat zal de uiteindelijke waarde moeten geven?

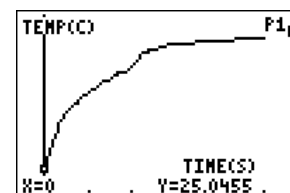
TIME GRAPH SETTINGS	
TIME INTERVAL:	1
NUMBER OF SAMPLES:	100
EXPERIMENT LENGTH:	100
1:OK	3:ADVANCED
2:CHANGE TIME SETTINGS	

CH 1: TEMP(C)	25.3
---------------	------

MODE: TIME GRAPH-100	
1: SETUP	4: ANALYZE
2: START	5: TOOLS
3: GRAPH	6: QUIT



- Een functievoorschrift dat voldoet aan dit verloop is  $f(x) = A - e^{B \cdot x + C}$  met  $B < 0$  en waarbij  $y = A$  de asymptoot is. Gebruik de applicatie Transfrm om de waarden van A, B en C te bepalen.

```

WINDOW SETTINGS
[ ] [ ] > >>
A=35
B=0
C=0
Step=.1
    
```

```

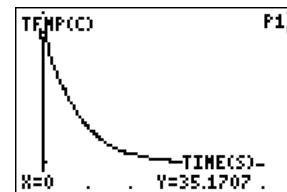
Plot1 Plot2 Plot3
M1Y1 A-e^(B*X+C)
M1Y2=
M1Y3=
M1Y4=
M1Y5=
M1Y6=
M1Y7=
    
```

## Deel 2: Afkoeling

- Start ook de applicatie DATAMATE op de rekenmachine. Hou de tip van de temperatuursensor een tijdje in de handpalm. Wanneer de aangegeven temperatuur niet meer wijzigt kunnen we het experiment starten.
- Laat de temperatuursensor los en start het opmeten.
- Na het beëindigen van het experiment verlaten we de applicatie. In de lijst L1 worden de tijdstippen opgeslagen en in de lijst L2 de waarden van de temperatuur.
- Maak een spreidingsgrafiek van de lijst L2 versus de lijst L1.
- Onderzoek met **TRACE** wat er gebeurt bij grote tijdswaarden.
- We merken dat de waarde van de temperatuur nog nauwelijks veranderd. Ook hier is er sprake van een asymptotisch gedrag. Wat is de verklaring? Wat zal de uiteindelijke temperatuur moeten worden?
- Een functievoorschrift dat voldoet aan het verloop is  $f(x) = A + e^{B \cdot x + C}$  met  $B < 0$  en waarbij  $y = A$  de asymptoot is. Gebruik de applicatie Transfrm om de waarden van A, B en C te bepalen.

```

CH 1:TEMP(C) 25.7
MODE:TIME GRAPH-180
1:SETUP      4:ANALYZE
2:START      5:TOOLS
3:GRAPH      6:QUIT
    
```



```

WINDOW SETTINGS
[ ] [ ] > >>
A=.8
B=0
C=5
Step=.1
    
```

### Varianten:

Zowel bij opwarming als bij afkoeling kunnen we ook met regressie het voorschrift van het verloop bepalen.

- Bepaal eerst de waarde van C door met TRACE de kromme te doorlopen. Kies voor C een waarde: de kleinste waarde groter dan alle meetwaarden voor de opwarming, de grootste waarde kleiner dan alle meetwaarden voor de afkoeling.



- Om regressie te kunnen toepassen moet eerst het voorschrift wat omvormd worden. Hier volgt de uitwerking voor opwarming:

$$y = A - e^{B \cdot x + C}$$

$$y - A = -e^{B \cdot x + C}$$

$$A - y = e^{B \cdot x + C} \quad (A - y > 0, \text{ waarom?})$$

$$\ln(A - y) = B \cdot x + C$$

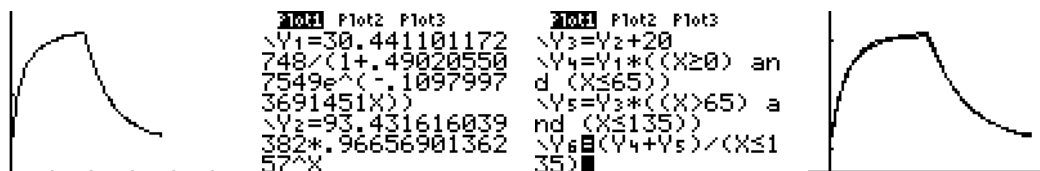
De coëfficiënten B en C zijn de parameters die berekend worden bij lineaire regressie van  $\ln(A-y)$  t.o.v. x. (y: temperatuurwaarden, x: tijdstippen).

Om lineaire regressie te kunnen toepassen, moeten we een lijst maken met de waarden van  $\ln(A-y)$ . De verschillende temperaturen waren opgespaard in lijst L2. We sparen de nieuwe waarden op in de lijst L3 door de volgende instructie  $\ln(A-L2) \blacktriangleright L3$  met C de waarde van de asymptoot. Daarna berekenen we de parameters A en B door lineaire regressie toe te passen op de lijsten L3 en L1 en we sparen het voorschrift op in Y1. Daarna is het niet moeilijk meer om de grafiek van  $y = A - e^{B \cdot x + C}$  te construeren en die te vergelijken met de oorspronkelijke grafiek van de meetwaarden.

Op een analoge manier kan ook voor de afkoeling het voorschrift bepaald worden.

### Deel 3: Een stuksgewijs gedefinieerde functie

Wanneer we beide verschijnselen combineren kunnen we een stuksgewijs gedefinieerde functie construeren. De linkse figuur geeft de grafiek weer na het uitvoeren van het experiment. In de rechtse figuur staan de oorspronkelijke grafiek (uit het experiment) en de benadering van de grafiek afgebeeld.



Opmerking: Een ander experiment om een stuksgewijs gedefinieerde functie te bestuderen is het laten vallen van een opgeblazen ballon. De ballon begint met een versnelde beweging om na enige tijd over te schakelen op een eenparige beweging. Door de wrijving van de lucht, neemt de snelheid van de ballon vanaf een bepaalde afgelegde weg niet meer toe en blijft constant.



De nieuwe leerplannen wiskunde (tweede en derde graad) beklemtonen om wiskunde te brengen vanuit concrete situaties, om de wiskunde toe te passen vanuit een context. In de meeste handboeken zijn er heel wat van deze contextvraagstukken opgenomen. Ik bleef altijd op mijn honger zitten hoe men tot de concrete voorschriften van de betrokken functies kwam.

Dit cahier doet een poging om vanuit eenvoudig uit te voeren experimenten, zowel qua handelingen als qua materieel, begrippen in verband met functies aan te brengen. In een tiental experimenten worden begrippen als recht evenredig, omgekeerd evenredig, periodiciteit, limietgedrag, stuksgewijs gedefinieerd zijn, ... behandeld. Het volledig spectrum van de functies uit de tweede en derde graad komen aan bod.

Als toemaatje kunnen de verkregen data als concrete gegevensverzamelingen gebruikt worden in de lessen statistiek.

Deze experimenten kunnen ook als onderzoekopdrachten gebruikt worden om de onderzoekscompetenties aan te scherpen. Tevens bieden ze ook mogelijkheden om samen te werken met de collega fysica in een vakoverschrijdend project.

DOMINIEK RAMBOER doceert wiskunde en fysica in de opleiding professionele bachelor aan het KHBO departement IWT en dit sedert een paar jaar. Voordien was hij 25 jaar leraar wiskunde en fysica in het technisch onderwijs. Hij is lid van de stuurgroep wiskunde voor de provincie West-Vlaanderen en medewerker van T3-Vlaanderen. Tevens is hij ook recensent voor Nova et Vetera/Breedbeeld, een tijdschrift uitgegeven door het VKSO en lid van de leerplancommissie wiskunde voor 2de en 3de graad TSO-KSO.

April 2009