Olika beräkningar av π

Stänga in π

Ca 250 f.Kr. beräknade den grekiske matematikern Arkimedes förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. Vi vet ju att detta kan uttryckas med formeln $O = 2\pi r$. En exakt bestämning av π hade länge intresserat de gamla grekerna. De strävade efter exakta matematiska proportioner i arkitektur, musik och andra konstformer. Andra approximationer av π hade varit kända i över 1 000 år. Arkimedes värde var dock inte bara att det var mer exakt, det var också den första teoretiska beräkningen av π. Vi ska här få testa Arkimedes metod själv på räknaren.

Så här går metoden till: Med Arkimedes' metod kan man hitta en approximation av π genom att bestämma längden på omkretsen av en polygon inskriven i en cirkel och omkretsen av en polygon som är omskriven cirkeln. Värdet på π som beräknas ska sedan finnas mellan dessa två omkretsar.

Genom att fördubbla antalet sidor i sexhörningen till en månghörning med 12 sidor, sedan en med 24 sidor och slutligen månghörningar med 48 och 96 sidor, kunde Arkimedes föra de två omkretsarna allt närmare cirkelns omkrets i längd och på så sätt komma fram till sin approximation.

Han fastställde då att π var mindre än 3 1/7 men större än 3 10/71. I den decimala notation som vi använder idag motsvarar detta intervall 3,1429 till 3,1408. Det är ganska nära det kända värdet 3,1416. (För enkelhetens skull avrundar vi alla siffror till fyra decimaler).

Nu över till konstruktionerna. Vi ska här använda de inbyggda funktionerna hos räknaren för sinus och rangens för att via beräkning av månghörningars omkrets beräkna allt bättre värden på π.

Inskrivna månghörningen:

I figuren i andra spalten så gäller att

$\sin(v) = \frac{s/2}{r}$ vilket ger då r=1 att $\sin(v) = s/2$.

Samtidigt gäller att vinkeln $v = \frac{180}{n}$ där n är antalet hörn i månghörningen. För figuren gäller till exempel att v=180/6 grader =30 grader. Vi får då:

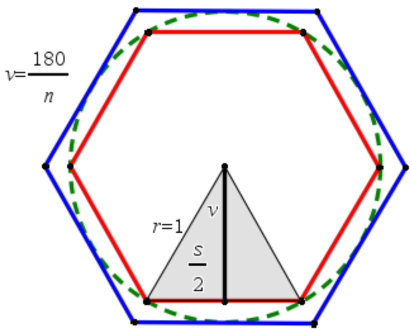
$\sin\left(\frac{180}{n}\right) = \frac{s}{2}$ som ger $s = 2 \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)$

För en n-hörning med sidan s enligt ovan får vi då att *omkretsen O* är

$n \cdot s = n \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)$

Då omkretsen hos en cirkel med radien 1 är $2 \cdot \pi$ så får vi dividera med 2 för att få ett närmevärde till π. Vi får alltså slutligen detta uttryck

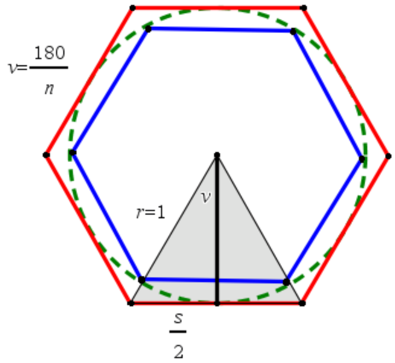
$$\boldsymbol{\pi \approx n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)}$$



Omskrivna månghörningen

Samma resonemang här men här får vi tangens i stället för sinus.

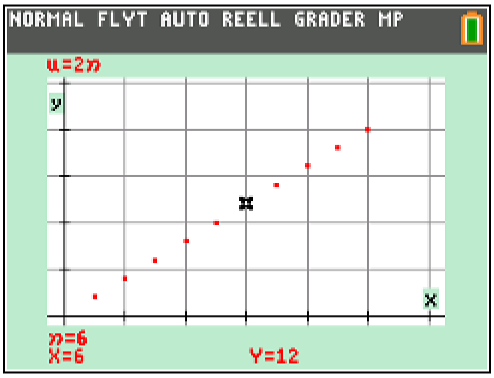
$$\boldsymbol{\pi \approx n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$



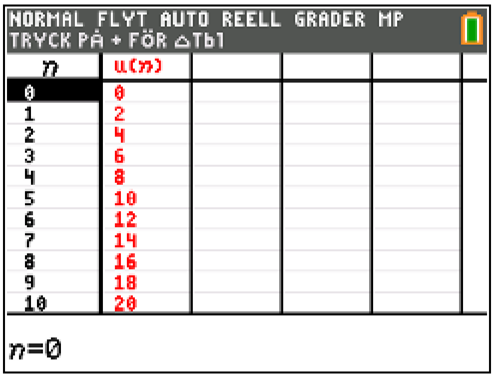
Skriva in formler med inställningen SEKV

Vi ska nu skriva in formlerna ovan i räknaren. Dock ska vi inte skriva in dem som funktioner. Värdet på ***n*** kan ju bara anta *heltalsvärden*. Ställ då först in räknaren för att arbeta med talföljder (*sequences* på engelska).

Ett exempel på en enkel talföljd är $u(n) = 2n$. Om vi plottar denna talföljd ser det ur så här:



Tabellen blir då så här:

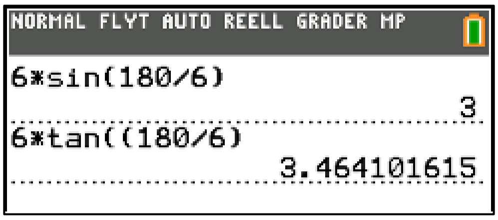

NORMAL FLYT AUTO REELL GRADER MP
TRYCK PÅ + FÖR ΔTbl

n	u(n)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

n=0

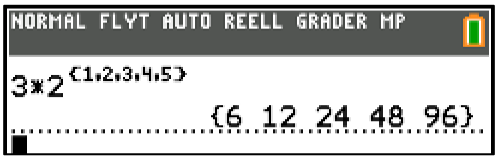
u(5) har alltså värdet 10.

Med formlerna på förra sidan skulle vi få följande värden på π för *n*=6 (sexhörningarna)



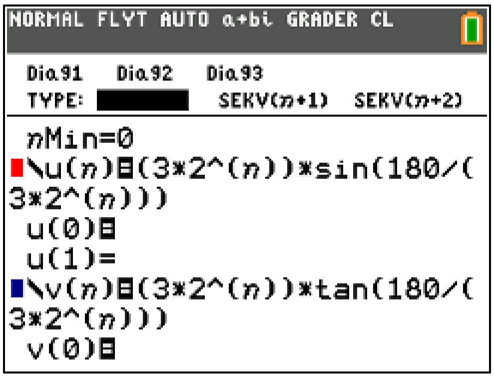
Vi ska nu göra som Arkimedes; vi ska dubblera antalet sidor i månghörningarna. 6 blir 12 som blir 24 osv.

Titta på uttrycket $\mathbf{3\cdot 2}^n$ för *n*= 1, 2, 3 osv. Vi får

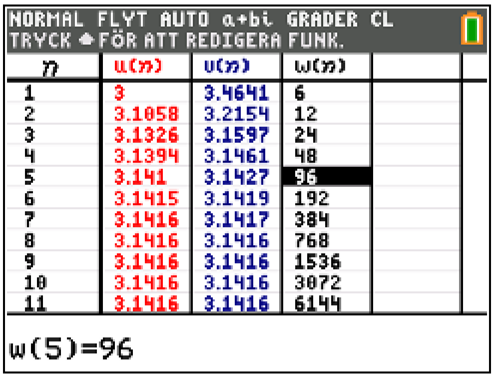


Vi ser att vi får en fördubbling varje gång, vilket var precis det vi önskade. Nu kan vi skriva in uttrycken i editorn för talföljder. Du trycker på tangenten [y=]. Vi har de två formlerna för den inskriva och omskrivna månghörningen. Som en tredje formel (syns inte på skärmbilden) har vi $\boldsymbol{w(n) = 3\cdot 2^n}$.

Tangenterna för u, v och w är [2nd]-funktioner till tangenterna för 7, 8 och 9.



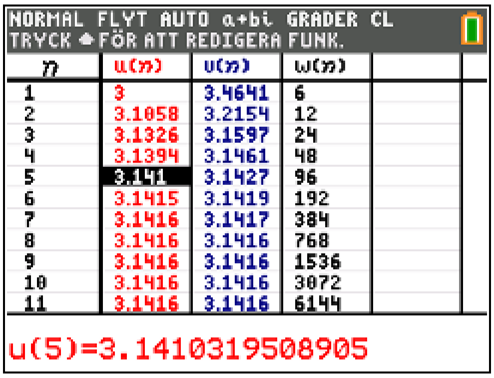
Närt du är klar med inskrivningen av formlerna trycker du på [2nd][table]. Då blir det så här:


NORMAL FLYT AUTO a+bi GRADER CL
TRYCK ♦ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

n	u(n)	v(n)	w(n)
1	3	3.4641	6
2	3.1058	3.2154	12
3	3.1326	3.1597	24
4	3.1394	3.1461	48
5	3.141	3.1427	96
6	3.1415	3.1419	192
7	3.1416	3.1417	384
8	3.1416	3.1416	768
9	3.1416	3.1416	1536
10	3.1416	3.1416	3072
11	3.1416	3.1416	6144

w(5)=96

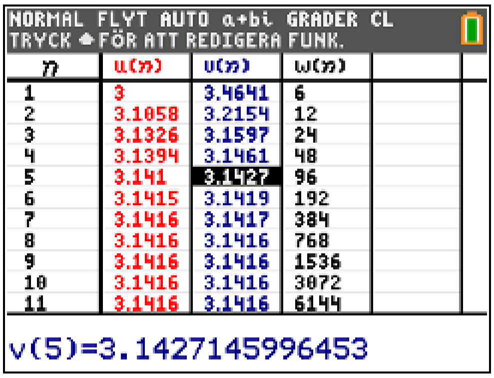
Om vi markerar värdena för *u*(5) och *v*(5) så får vi värdena med 13 decimaler:



NORMAL FLYT AUTO a+bi GRADER CL
TRYCK ◆ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

n	u(n)	v(n)	w(n)
1	3	3.4641	6
2	3.1058	3.2154	12
3	3.1326	3.1597	24
4	3.1394	3.1461	48
5	3.141	3.1427	96
6	3.1415	3.1419	192
7	3.1416	3.1417	384
8	3.1416	3.1416	768
9	3.1416	3.1416	1536
10	3.1416	3.1416	3072
11	3.1416	3.1416	6144

u(5)=3.1410319508905

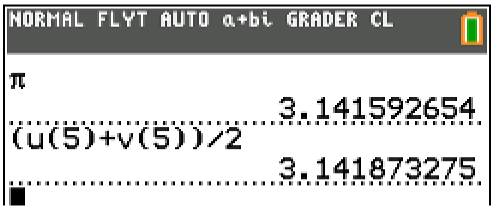


NORMAL FLYT AUTO a+bi GRADER CL
TRYCK ◆ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

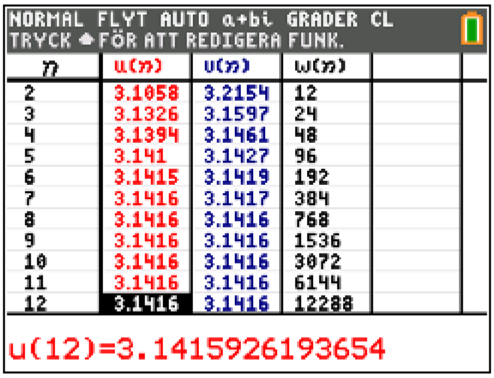
n	u(n)	v(n)	w(n)
1	3	3.4641	6
2	3.1058	3.2154	12
3	3.1326	3.1597	24
4	3.1394	3.1461	48
5	3.141	3.1427	96
6	3.1415	3.1419	192
7	3.1416	3.1417	384
8	3.1416	3.1416	768
9	3.1416	3.1416	1536
10	3.1416	3.1416	3072
11	3.1416	3.1416	6144

v(5)=3.1427145996453

Vi har alltså bestämt att π har ett värde mellan u(5) och v(5). Medelvärdet blir 3,141873275. Jämför med räknarens inbyggda värde för π.



Nu går vi vidare och gör beräkningen med allt fler hörn. 12288 hörn ger värdet 3,1415926…. .
8 korrekta värdesiffor alltså. Beräkna gärna medelvärdet här också.



NORMAL FLYT AUTO a+bi GRADER CL
TRYCK ◆ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

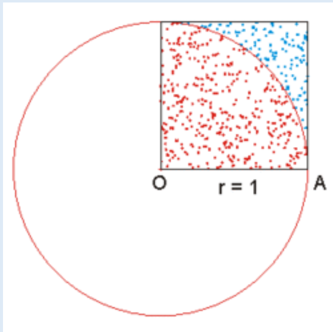
n	u(n)	v(n)	w(n)
2	3.1058	3.2154	12
3	3.1326	3.1597	24
4	3.1394	3.1461	48
5	3.141	3.1427	96
6	3.1415	3.1419	192
7	3.1416	3.1417	384
8	3.1416	3.1416	768
9	3.1416	3.1416	1536
10	3.1416	3.1416	3072
11	3.1416	3.1416	6144
12	3.1416	3.1416	12288

u(12)=3.1415926193654

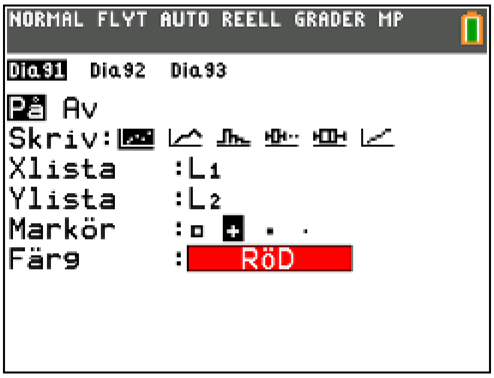
Beräkna π med geometrisk sannolikhet.

I denna aktivitet använder vi en s.k. Monte Carlo-metod för att beräkna ett värde på naturkonstanten π.

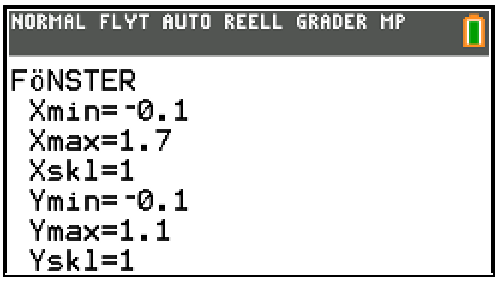
Så här beskrivs metoden i Wikipedia:

> Enligt formeln för cirkelns area är arean av en kvartscirkel med radien 1 exakt 1/4·π. Placeras en kvartscirkel i en kvadrat med sidan och arean 1, som i figuren, kommer andelen av kvadraten som ligger i kvartscirkeln att vara samma som dess area.
>
> 
>
>
> Genom att slumpmässigt generera likformigt fördelade punkter i kvadraten och räkna hur många av dem som hamnar inuti kvartscirkeln kan andelen uppskattas, och därmed arean på kvartscirkeln. Ju fler punkter som genereras desto bättre blir uppskattningen, enligt de stora talens lag. Om uppskattningen multipliceras med 4 får man en uppskattning av π.

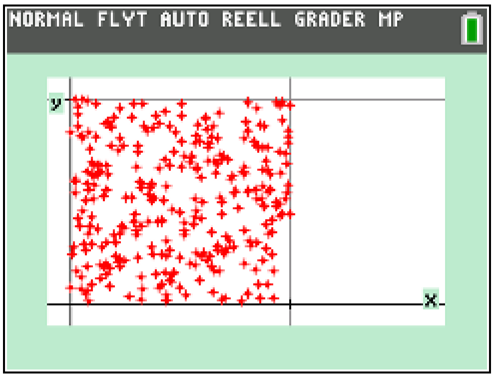
Så här fungerar metoden på räknaren: I listorna L1 och L2 så alstrar vi 300 likformigt fördelade slumptal mellan 0 och 1 med kommandot **rand(300)**. Så här ser inställningen ut i inställningsfönstret:



Om vi sedan visar ett spridningsdiagram så hamnar alla dessa punkter i en kvadrat med sidan 1. För att få ett koordinat-system där en enhet är lika lång på både x- och y-axeln. Ett bra fönster är följande:



Så här blir nu graffönstret. 300 prickar slumpmässigt utspridda i ett 1x1-fönster.



För att ta reda på hur många av dessa punkter som ligger inom en kvartscirkel med radien 1 så beräknar vi hypotenusan i en tänkt rätvinklig triangel med Pythagoras sats där slumptalen i listorna L1 och L2 motsvarar kateterna. I kolumnhuvudet i statistikeditorn så skriver du

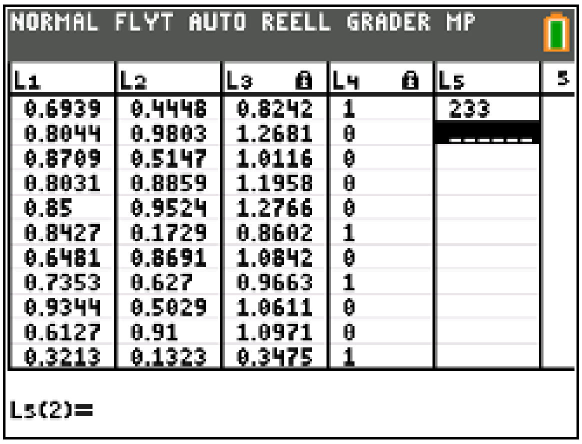
L3="[2nd][√](L1^2+L2^2)"

Observera att vi har citattecken omkring formeln. Detta gör att data i listan uppdateras om du alstrar nya slumptal i L1 och L2.

Sedan kommer det fiffiga: i lista L4 skriver du

L4="L3≤1"

Är talen i L3 mindre än 1 skrivs värdet 1 in och är värdet större än 1 skrivs 0 in. Vi får nu en massa nollor och ettor i lista L4. Vi ska sedan summera dessa. Det har vi gjort i första raden i L5. Man skriver då instruktionen **sum(L4).** Du hittar instruktionen genom att trycka på [list] och sedan välja alternativet MA för matematik och sedan alternativ 5. Vi fick 233 "träffar".



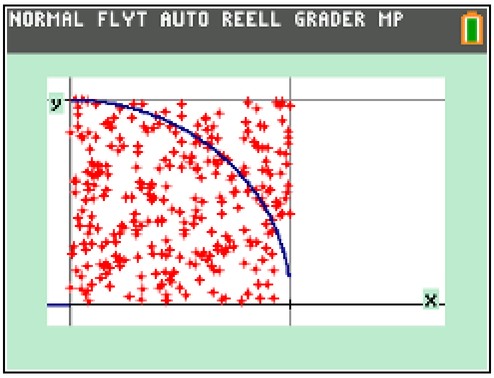
NORMAL FLYT AUTO REELL GRADER MP

L1	L2	L3	L4	L5
0.6939	0.4448	0.8242	1	233
0.8044	0.9803	1.2681	0	------
0.8709	0.5147	1.0116	0	
0.8031	0.8859	1.1958	0	
0.85	0.9524	1.2766	0	
0.8427	0.1729	0.8602	1	
0.6481	0.8691	1.0842	0	
0.7353	0.627	0.9663	1	
0.9344	0.5029	1.0611	0	
0.6127	0.91	1.0971	0	
0.3213	0.1323	0.3475	1	

L5(2)=

Nu lägger vi in en kvartscirkel i spridningsdiagrammet. Vid Y1 i inskrivningsfönstret för funktioner skriver du då så här

Nu ser graffönstret ut så här:



233 av 300 kryss ligger alltså innanför kvartscirkeln. Det motsvarar andelen 233/300.

För att beräkna värdet på π så måste vi naturligtvis multiplicera med 4. Detta ger att

$$\pi = 4\cdot\frac{233}{300} \approx 3{,}1066...$$

Gör nu en egen simulering på samma sätt vi gjort här. I listorna kan du maximalt ha 999 data.