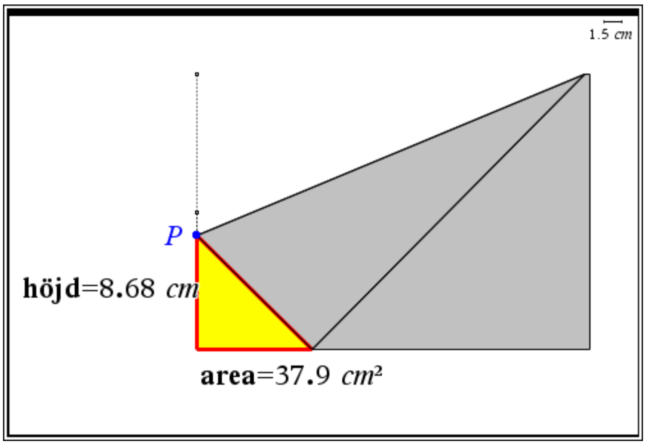
Pappersvikning

En A4- papper mäter har måtten bas 29,7 cm, höjd 21,0 cm. Det övre vänstra hörnet av papperet viks så att hörnet når basen hos sidan. En triangel bildas då i det nedre vänstra hörnet. Syftet med denna undersökning är att bestämma den maximala arean av denna triangel.

Se till att börja denna aktivitet med papper och penna och vik papperet enligt instruktionen ovan. Det underlättar i det fortsatta arbetet och man får en bättre känsla för problemet.

Sidan nedan är sid 1 i TI-Nspire-programmet. Du kan dra i punkten *P* och se hur höjd och area ändras.



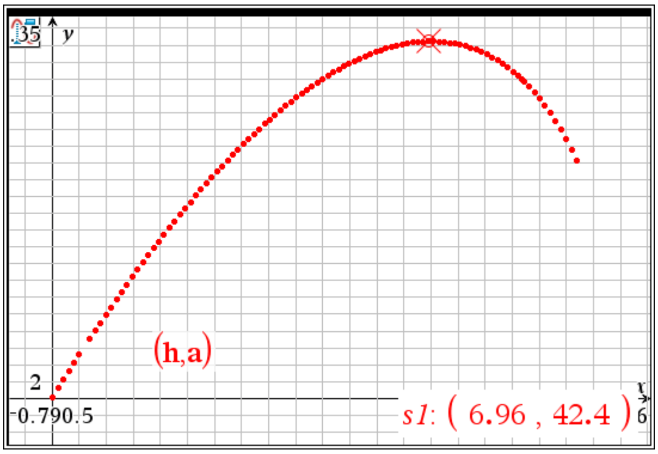
När du gör det så alstras data på nästa sida i programmet med en speciell funktion *capture*. Det här är TI-Nspire´s kalkylbladsappp. Det här är ett exempel på s.k. dynamisk geometri.

	A a	B h	C	D
=	=capture('area,1)	=capture('höjd,1)		
1	37.9278	8.68277		
2	40.5582	8.1295		
3	41.1828	7.93398		
4	41.4429	7.83622		
5	41.6701	7.73846		
6	41.8656	7.6407		
7	42.0306	7.54294		

A1 =37.927849848866

Man kan rensa dessa data om man vill göra om drag-ningen av punkten *P*.

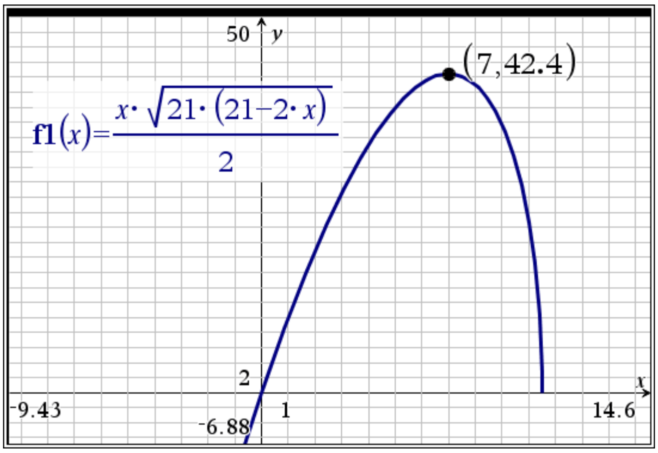
På sid 4 i programmet, som är en grafritningssida, finns ett spridningsdiagram med värden för höjden (*h*) på den vågräta axeln och värden för arean (*a*) på den lodräta axeln. Vi kan spåra i diagrammet och se att den maximala arean verkar bli ca 42,4 cm^2.



Om vi betecknar höjden i triangeln med *x* så ser vi att hypotenusan (den nedvikta delen) är 21-*x*. Pythagoras sats ger då att basen i triangeln blir $\sqrt{21\cdot(21-2x)}$. Detta ger att arean blir

$$\frac{x\cdot\sqrt{21\cdot(21-2x)}}{2}$$

Vi matar nu in uttrycket ovan som en funktion i grafappen och bestämmer med analysverktyget Maximum det största värdet. Se skärmbild nedan.



Symbolhanterande hjälpmedel

Hur kan vi nu bestämma den största arean *exakt*? Vi bestämmer först derivatan av funktionen f1(x). Verktyg för **CAS** (symbolhanterande verktyg) finns både för algebra och analys.

Den symboliska beräkningen av derivatan och förenk-lingen av uttrycket har vi gjort i en av apparna där man också kan skriva text, som kan formateras i olika stilar, färger och storlekar. Vi ser att vi får ett behändigt uttryck och genom att koncentrera sig på uttrycket i täljaren så ser vi direkt att ett *nollställe* för derivatan är x = 7.

Vi deriverar funktionen:

$$\frac{d}{dx}(f1(x)) ▸ \frac{\sqrt{-21\cdot(2\cdot x-21)}}{2}-\frac{\sqrt{21}\cdot x}{2\cdot\sqrt{21-2\cdot x}}$$

Ser krångligt ut. Vi använder verktyget för gemensam nämnare.

$$\text{comDenom}\left(\frac{\sqrt{-21\cdot(2\cdot x-21)}}{2}-\frac{\sqrt{21}\cdot x}{2\cdot\sqrt{21-2\cdot x}}\right)$$

$$▸ \frac{21\cdot\sqrt{21}-3\cdot\sqrt{21}\cdot x}{2\cdot\sqrt{21-2\cdot x}}$$

Vi fortsätter här de symboliska beräkningarna

Det går att utföra beräkningen direkt så här:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f1(x))=0),x\right) ▸ x=7$$ ⚠

Vi beräknar sedan den maximala arean:

$$f1(7) ▸ \frac{49\cdot\sqrt{3}}{2}$$

Det verkar som höjden i triangeln är en tredjedel av papperets höjd (21/3=7). Gäller det för vikningar av alla möjliga storlekar på papperet? Vi prövar genom att ha en höjd på z cm.

Genom att ha en godtycklig höjd, som vi kallar z, ser vi att höjden i triangeln *alltid* är 1/3 av papperets höjd.

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x\cdot\sqrt{z\cdot(z-2\cdot x)}}{2}\right)=0,x\right) ▸ x=\frac{z}{3}$$

Höjden i triangeln är alltså alltid en tredjedel av papperets höjd.

Hur stora är nu vinklarna i triangeln?