

Triangelolikheten

Här ett problem som vi kommer att attackera på flera olika sätt. Problemet passar att ta upp i kurs 2 när man behandlat geometri och sannolikhetslära.


På första sidan i dokumentet skriver vi att man ska försöka använda sugrör eller spagettistickor för att utföra försöket praktiskt. Vi rekommenderar att man gör det. En svårighet är att slumpmässigt försöka få två brott (vikningar) samtidigt. Ett annat problem är att om man först gör ett brott (vikning) så tenderar man att välja den längre biten nästa gång.

Sid 2-3: På de första sidorna visar vi en algebraisk lösning. Vi ställer upp ett antal olikheter och visar det sedan geometriskt i ett koordinatsystem på sid 3. Den streckade ytan av triangeln representerar då lösningen till alla olikheter.

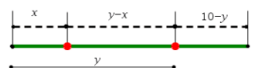
Man utgår då från att summan av längderna för två av bitarna, kvittar vilka, måste vara längre än den tredje sidan.

Algebraisk lösning

Av figuren nedan inser vi lätt att summan av längderna för två av bitarna, kvittar vilka, måste vara längre än den tredje sidan.



För enkelhetens skull antar att sugrörslängd är 10 cm långt. Vi viker nu på två ställen, x och y , räknat från den ena ändan. Längderna blir då x , $y-x$ och $10-y$. Se figuren nedan.



Följande tre olikheter gäller då:

$$x + (y - x) > 10 - y, \quad (1)$$

$$x + (10 - y) > y - x, \quad (2)$$

$$(y - x) + (10 - y) > x \quad (3)$$

Dessa tre olikheter kan nu förenklas:

$$y > 5 \quad (1)$$

$$y < x + 5 \quad (2)$$

$$x < 5 \quad (3)$$

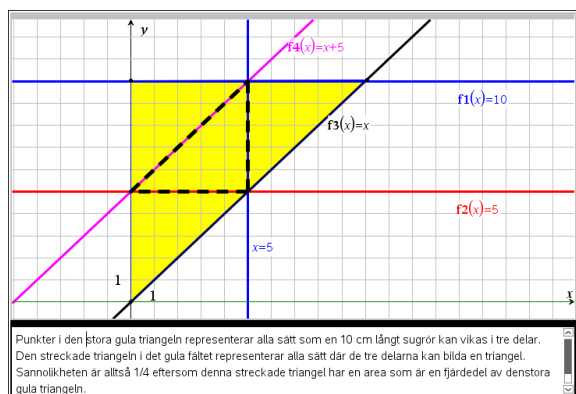
Dessutom gäller ju naturligtvis att

$$y > x$$

$$y < 10$$

$$x > 0$$

Lösningarna till detta system av olikheter kan representeras av alla sätt som de tre längderna kan bilda en triangel. Se nästa sida.



I graffönstret har vi ritat 4 funktioner och linjen $x = 5$, som inte är en funktion. Att rita en sådan linje kan man enkelt göra på följande sätt: Gå till Åtgärder i verktygsmenyn och välj Text och tryck enter. Skriv sedan in $x=5$ och tryck enter igen. Flytta sedan textrutan mot någon av koordinataxlarna. Linjen dyker upp på skärmen.

Sid 4-5: Här visar vi nu en helt geometrisk lösning.

Vi börjar med att rita en liksidig triangel ABC med höjden BD . P är en punkt någonstans inne i triangeln. Vi drar linjer från punkten P till triangelns hörn och drar sedan också vinkelräta linjesegment från P mot triangelns tre sidor. Dessa linjesegment blir då höjder i de tre trianglarna.

Vi ser att vi nu har delat upp den stora triangeln ABC i tre mindre trianglar och de har alla samma bas som den stora triangeln. Det betyder att summan av höjderna (ritade i rött) i de tre deltriangelarna är lika med höjden BD i den stora triangeln eftersom summan av de tre deltriangelarna area är lika med den stora triangelns area.

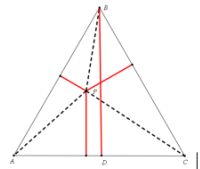
Punkten P kan nu flyttas runt i triangeln och vi får andra höjder. Summan av dessa höjder är hela tiden konstant.

Geometrisk lösning

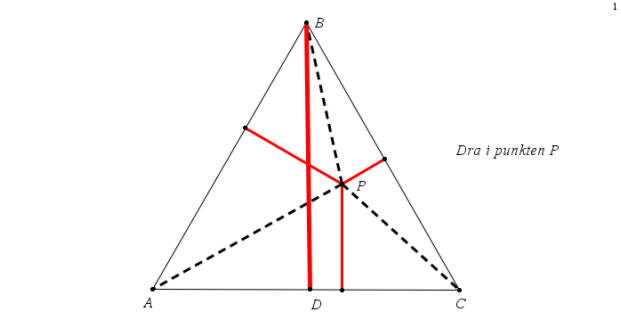
Vi upprepar problemet: Tänk dig att du har ett sugrör och slumpmässigt viker det på två ställen. Vad är sannolikheten att du då kan bilda en triangel av de tre delar du då får?

Vi visar nu en annan geometrisk modell. Vi börjar med att rita en liksidig triangel ABC med höjden BD . P är en punkt någonstans inne i triangeln. Vi drar linjer från punkten P till triangelns hörn och drar sedan också vinkelräta linjesegment från P mot triangelns tre sidor. Dessa linjesegment blir då höjder i de tre trianglarna.

Vi ser att vi nu har delat upp den stora triangeln ABC i tre mindre trianglar och de har alla samma bas som den stora triangeln. Det betyder att summan av höjderna (ritade i rött) i de tre deltriangelarna är lika med höjden BD i den stora triangeln. Punkten P kan nu flyttas runt i triangeln och vi får andra höjder. Summan av dessa höjder är hela tiden konstant. Se nästa sida.



Genom att flytta runt punkten P i triangeln så kan vi få oändligt antal kombinationer av höjder. Deras summa är hela tiden konstant (lika med höjden BD). Var någonstans ska punkten P placeras för att de tre höjderna ska kunna bilda en triangel?



Dra i punkten P

Genom att flytta runt punkten P i triangeln så kan vi få oändligt antal kombinationer av höjder. Deras summa är hela tiden konstant (lika med höjden BD). **Var någonstans ska punkten P placeras för att de tre höjderna ska kunna bilda en triangel?**

Sid 6: Vi redovisar här den lösning som gjordes av Martin Gardner i en kolumn i tidskriften *Scientific American*, där han medverkade i 25 år. Det finns tydliga anvisningar i dokumentet. En mycket elegant lösning som man nu kan visualisera med programmets interaktiva funktioner.

Triangelolikheten

Vi redovisar nu den lösning som gjordes av Martin Gardner i en kolumn i tidskriften *Scientific American*, där han medverkade i 25 år.

För att de tre delarna ska kunna bilda en triangel måste en del vara mindre än summan av de två andra delarna. Då hela längden är 10 cm i vårt exempel så måste längden hos alla 3 delarna vara mindre än 5 cm. Ett sätt att få detta är att dra linjer parallellt med och 5 cm ifrån varje sida i triangeln ABC. Vi får då en mindre liksidig triangel inne i den stora triangeln. Vi har markerat denna triangel i brun färg.

Punkter som ligger inne i den mindre bruna triangeln bildar då höjder (markerade i röd färg) som kan bilda en triangel. För punkter som ligger precis på kanterna till den mindre triangeln är den längre av de tre röda linjerna precis lika stor som summan av de två kortare. För punkter utanför den mindre triangeln kan de tre röda linjerna inte bilda en triangel. Elegant! ☺

Då den mindre triangeln är 1/4 av den stora så är alltså sannolikheten 1/4.

Sid 7-8: Här har vi gjort en simulering av problemet. Det finns tydliga anvisningar på sid 7 hur kalkylarket är uppbyggt.

Om man trycker på Ctrl r alstrar vi nya slumpantal och vi får ett nytt värde på sannolikheten.

sk1	försök2	första	andra	mitten...	sista_l...	lycka...	H
23	8.43702...	5.75023...	8.43702...	2.68678...	1.56297...	0.	0.254
29	9.03284...	7.23909...	9.03284...	1.79375...	0.96715...	0.	
74	3.20162...	3.20162...	6.85074...	3.64912...	3.14925...	1.	
51	7.56075...	3.36661...	7.56075...	4.19413...	2.43924...	1.	
55	7.44862...	3.87465...	7.44862...	3.57396...	2.55137...	1.	
21	1.66667...	1.66667...	5.71521...	4.04854...	4.28478...	1.	
71	4.53572...	4.53572...	6.87801...	2.34228...	3.12198...	1.	
37	1.55313...	1.55313...	7.24787...	5.69474...	2.75212...	0.	
17	9.44698...	5.25617...	9.44698...	4.19081...	0.55301...	0.	
104	4.07747...	2.99404...	4.07747...	1.08342...	5.92252...	0.	
20	0.04654...	0.04654...	5.48520...	5.48520...	4.51466...	0.	
=sum('lyckat_försök')							1000

När man utför detta försök praktiskt med spagetti-stickor eller sugrör så tenderar man att göra brytningen/vikningen någonstans runt mitten eftersom man använder båda sina händer. Detta gör att man får ett resultat som inte alls stämmer med teorin. Om man gör en brytning/vikning och sedan bryter den längre biten nästa gång (vilket många gör) blir det också helt fel. Den teoretiska sannolikheten i det sista fallet blir 0,386.