Upprepade beräkningar

I denna övning ska vi syssla en hel del med talföljder som tas fram genom *rekursiva beräkningar.*

Regeln är ju*:* nästa tal i talföljden följer från tidigare tal enligt en bestämd regel. Man behöver sedan ett tal som sätter igång talföljden och de kallas *startvärden.*

Sid 1-2:

Vi börjar med ett klassiskt problem som redan babylonierna visste hur man skulle lösa. Det finns en utförlig beskrivning på sid 1. Beräkningarna utförs sedan på sid 2.

Upprepade beräkningar eller om rotknappen inte fungerar

Redan för flera tusen år sedan visste Babylonierna hur man beräknade närmevärden för kvadratrötter. Så här gjorde de t.ex. när de skulle beräkna $\sqrt{2}$:

De började med en första gissning, t.ex. $x_1 = 3/2 = 1{,}5$. När vi kvadrerar $x_1=3/2$ får vi $9/4=2{,}25$, som är större än 2. Alltså är $3/2>\sqrt{2}$. De beräknade sedan $2/x_1= 2/(3/2)$. Vi får resultatet 4/3, vars kvadrat är 16/9, som är mindre än 2 Alltså: $2/x_1<\sqrt{2}$.

För att få ett bättre närmevärde tog de ***medelvärdet***, som vi kallar x_2:

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{17}{12}\quad(\approx 1{,}4166\ldots)$$

Man kan nu beräkna nu ett ännu bättre närmevärde x_3 genom att stoppa in värdet på x_2 i formeln igen. Man skriver in talen i bråkform och inte som decimaltal.

Man matar alltså från början in 3/2 trycker på enter och skriver sedan

$$\frac{\frac{2}{\text{Ans}}+\text{Ans}}{2}$$

och fortsätter sedan att trycka på enter ett antal gånger. Ans betyder det sist beräknande värdet. Det sista uttrycket ger närmevärdet 1,41421356237. Rotknappen ger samma resultat. Se nästa sida.

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}}{2} \qquad \frac{17}{12}$$

$$\frac{\frac{2}{\frac{17}{12}}+\frac{17}{12}}{2} \qquad \frac{577}{408}$$

$$\frac{\frac{2}{\frac{577}{408}}+\frac{577}{408}}{2} \qquad \frac{665857}{470832}$$

$$\frac{665857}{470832} \qquad 1.4142135623$$

Sid 3-4:

Upprepade beräkningar kan användas för att lösa många olika problem. På dessa sidor beskriver vi hur man löser ett enkelt problem inom ekonomi. Både kalkylarket och appen Räknare används. Vi kommer i räknarappen dock bara en bit på vägen om vi inte trycker på enter en massa gånger.

I nästa problem visar vi hur man kan använda grafapplikationen för att lösa problemet.

Som du ser så räknar TI− Nspire CAS *exakt* med tal i bråkform. Ganska imponerande.

När du vill få ett *närmevärde* i decimalform trycker du på Ctrl och Enter samtidigt.

Pröva gärna med ett annat tal istället för 2. Mata in en första gissning som ett bråktal och upprepa proceduren från exemplet med roten ur 2.

Den här metoden att genom upprepade beräkningar (rekursion) beräkna nya resultat är ytterst användbart i många situationer. Man kan t.ex. utnyttja rekursion för att beräkna termerna i den väkända Fibonaccis talföljd. Man kan också utnyttja upprepade beräkningar på problem inom ekonomi.

Du har ett lån på en miljon kronor på din bostad. Räntan är 2,0 % och du betalar av på lånet med 36 000 kr per år. Hur utvecklas skulden?

I kalkylbladsapplikationen är det väldigt enkelt att få en lista med återstående skuld år för år. Skriv 1000000 i cell B1. I cell B2 skriver du **= B1·1.02−36000** och trycker på enter. Du kopierar sedan denna cell och markerar sedan ett antal celler nedåt och klistrar in. Man kan också använda funktionen *Fylla*.

I Räknarapplikationen gör du så här: Mata in startvärdet 1000000, tryck på Enter och skriv sedan det rekursiva uttrycket **Ans·1.02−36000** på nästa rad. Fortsätt sedan att trycka på Enter. Hur många gånger måste du trycka på Enter innan skulden är betald?

Vi ser att beräkningarna utförs likadant i båda applikationerna.

	A år	B skuld	C
=			
1	0	1000000	
2	1	984000.	
3	2	967680.	
4	3	951033.6	
5	4	934054.272	
6	5	916735.35744	
7	6	899070.064589	
8	7	881051.465881	
9	8	862672.495198	
10	9	843925.945102	

A1 0

1000000	1000000
1000000· 1.02−36000	984000
984000.· 1.02−36000	967680
967680.· 1.02−36000	951034
951033.6· 1.02−36000	934054
934054.272· 1.02−36000	916735
916735.35744· 1.02−36000	899070
899070.0645888· 1.02−36000	881051
881051.46588058· 1.02−36000	862672
862672.49519819· 1.02−36000	843926
843925.94510215· 1.02−36000	824804

Problem 2

Sid 1-3:

Här visar vi hur man kan plotta talföljder i rekursiv form.

I exemplet med beräkning av roten ur 2 gjorde vi ett antal upprepade beräkningar. Sådana här beräkningar kallas rekursiva och en talföljd är rekursiv om nästa tal i talföljden följer från tidigare tal enligt en bestämd regel. Tal som behövs för att sätta igång följden kallas startvärden.

Hos TI−Nspire finns i grafapplikationen möjlighet att arbeta med sådana talföljder. Vi visar nu hur du utför beräkningen av roten ur 2.

Gå till Grafinmatning/Redigera och sedan Talföljd. Du skriver sedan in det rekursiva uttrycket.

u står här för talföljd och siffran efter betyder bara att bara att andra talföljder med lägre siffra används inom samma problem.

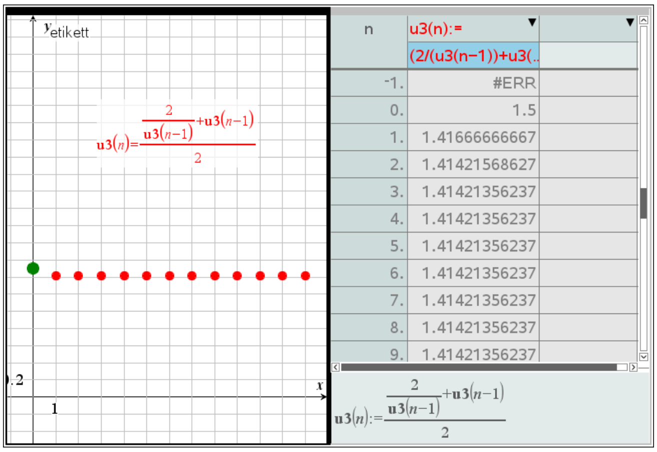
Den första punkten, som är startvärdet, kan du dra i. Vad händer med de efterföljande värdena i diagrammet? Titta i tabellen.

På sid 2 och 3 visar vi alltså de rekursiva talföljderna grafiskt och i tabell både för kvadratrotsberäkningen och för problemet med avbetalning på ett lån.

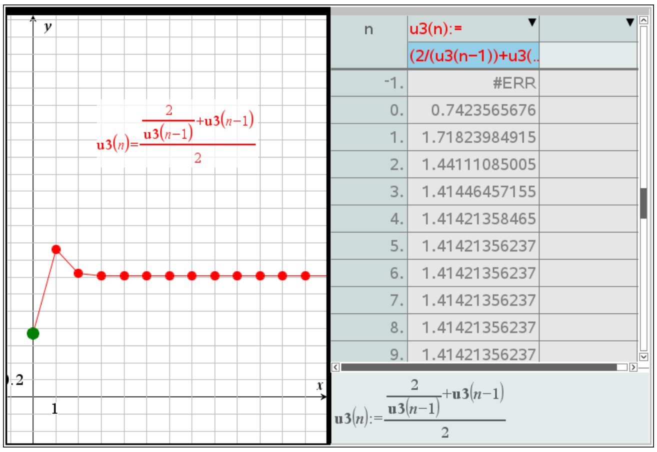
Observera hur man skriver in uttryck i rekursiv form. För kvadratrotsbestämningen blir det på formen

$$u(n)=\frac{\frac{2}{u(n-1)}+u(n-1)}{2}$$

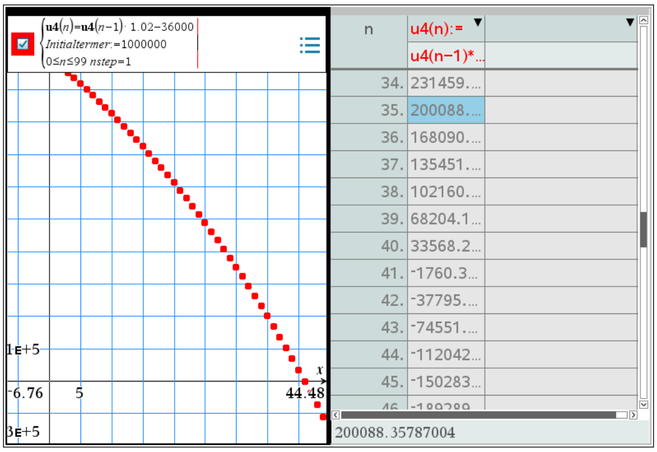
Från början stoppar man alltså in startvärdet som $u(n\text{-}1)$.



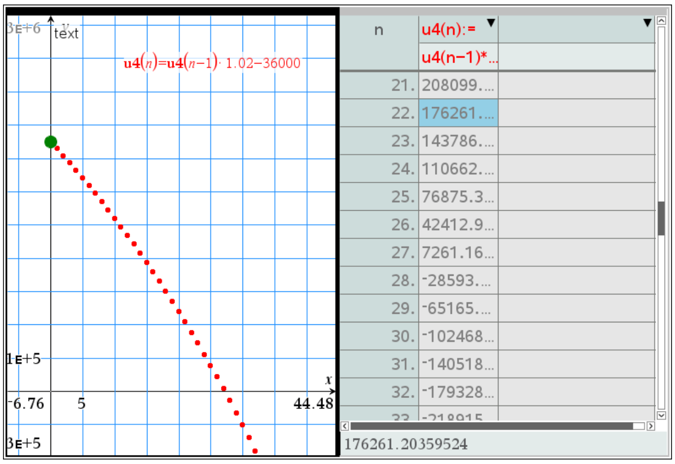
Om du drar i den gröna punkten, som är startvärdet, så får man bara göra lite flera rekursiva beräkningar innan värdet stabiliseras. Vi visar detta nedan och vi har förbundit punkterna. Högerklicka på punkterna och välj *Attribut.* Då kan du ställa in detta.



Så här blir det för avbetalningsproblemet. Det tar 40 år innan skulden är betald.



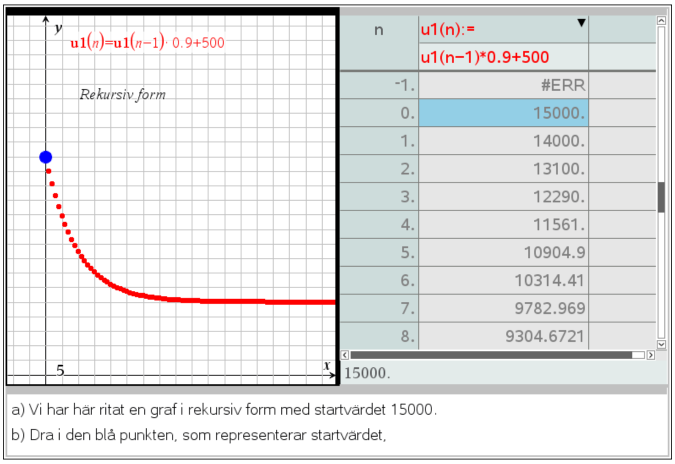
Om du drar i startvärdet (den gröna punkten) så får du en annan kurva och en annan tabell.



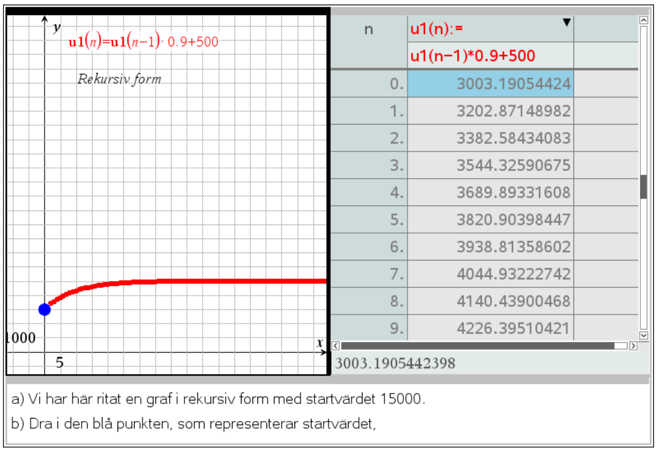
Sid 4-5

Sista problemet handlar om ett skogsbestånd.

Beståndet verkar stabilisera sig på längre sikt eftersom kurvan planar ut.



Om vi drar i startvärdet kan det se ut som på nästa sida.



n	u1(n):= u1(n−1)*0.9+500
0.	3003.19054424
1.	3202.87148982
2.	3382.58434083
3.	3544.32590675
4.	3689.89331608
5.	3820.90398447
6.	3938.81358602
7.	4044.93222742
8.	4140.43900468
9.	4226.39510421

Det verkar som kurvan planar ut här också. Detta ska vi undersöka närmare.

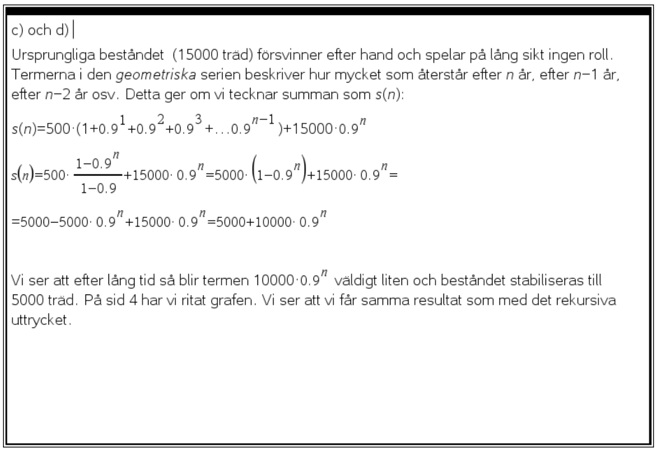
Sid 6-7:

Här har vi delat upp beräkningen i två delar:

- summan av geometrisk talföljd (nyplanteringens utveckling)
- ett uttryck för hur beståndet från början avtar.

Dessa två delar adderas sedan.

Vi kommer då fram till uttrycket $5000+10000\cdot 0.9^n$, som är ett uttryck i *sluten* form.


c) och d)

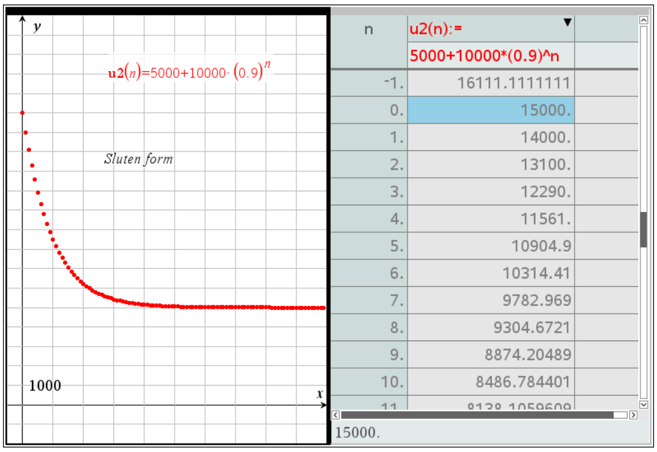
Ursprungliga beståndet (15000 träd) försvinner efter hand och spelar på lång sikt ingen roll. Termerna i den *geometriska* serien beskriver hur mycket som återstår efter n år, efter $n-1$ år, efter $n-2$ år osv. Detta ger om vi tecknar summan som $s(n)$:

$$s(n)=500\cdot(1+0.9^1+0.9^2+0.9^3+\ldots0.9^{n-1})+15000\cdot 0.9^n$$

$$s(n)=500\cdot\frac{1-0.9^n}{1-0.9}+15000\cdot 0.9^n=5000\cdot\left(1-0.9^n\right)+15000\cdot 0.9^n=$$

$$=5000-5000\cdot 0.9^n+15000\cdot 0.9^n=5000+10000\cdot 0.9^n$$

Vi ser att efter lång tid så blir termen $10000\cdot 0.9^n$ väldigt liten och beståndet stabiliseras till 5000 träd. På sid 4 har vi ritat grafen. Vi ser att vi får samma resultat som med det rekursiva uttrycket.



n	u2(n):= 5000+10000*(0.9)^n
-1.	16111.1111111
0.	15000.
1.	14000.
2.	13100.
3.	12290.
4.	11561.
5.	10904.9
6.	10314.41
7.	9782.969
8.	9304.6721
9.	8874.20489
10.	8486.784401